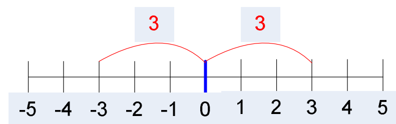
ערך מוחלט

מהו ערך מוחלט

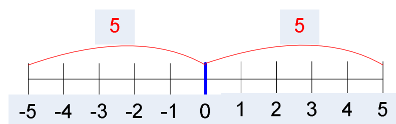
הערך המוחלט של מספר כלשהו הוא המרחק בין המספר לבין האפס על ציר המספרים.

למשל – המרחק של 3 יחידות מהאפס :



כלומר, אפשר לספור מרחק של 3 יחידות מ- 0 לכיוון החיובי של ציר ה- x או לכיוון השלילי של ציר ה- x.
אז מקבלים כי המרחק בין 0 לבין 3 הוא מרחק של 3 יחידות, וגם המרחק בין 0 לבין -3 הוא מרחק של 3 יחידות.

באותו אופן, המרחק של 5 יחידות מהאפס :



כלומר המרחק של 5 מ- 0 הוא 5 יחידות, וגם המרחק של -5 מ- 0 הוא 5 יחידות.

מכאן כבר ברור כי **המרחק הוא תמיד אי-שלילי**, כלומר יכול להיות מרחק 0 (מ- 0 לעצמו) או מרחק חיובי ממש. <u>לא יתכן כי מרחק יהיה שלילי</u>.

- מסמנים ערך מוחלט של מספר כלשהו x בסימון הבא : $|x|$.

בדוגמה הראשונה דיברנו על מרחק של 3 יחידות מהאפס, וקיבלנו כי מתקיים : $|-3|=|3|=3$, כלומר המרחק של 3 מהאפס שווה למרחק של -3 מהאפס ושניהם נמצאים במרחק 3 יחידות מהאפס.

באותו אופן, עבור הדוגמה השנייה מתקיים : $|-5|=|5|=5$.

בצורה מתמטית נסמן :

$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא חיובי אז $|x|=x$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא שלילי אז $|x|=-x$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא אפס אז $|0|=0$

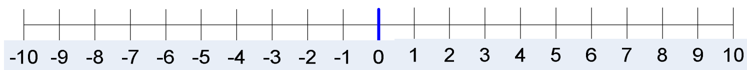
או כפי שכבר ראינו, מתקיים : $|5|=5$ אבל גם $|-5|=5$.

תרגילים במהו הערך המוחלט

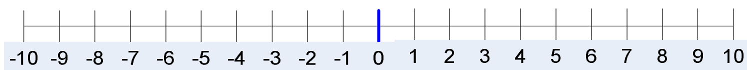
שאלה 1

נתונים צירים מספרים ריקים. יש לסמן על כל ציר את המרחקים הנתונים בכל סעיף.

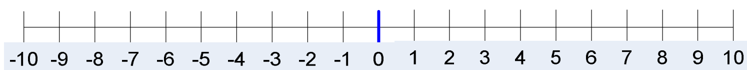
א. $|9|$



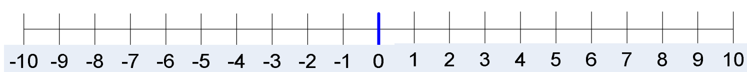
ב. $|-4|$



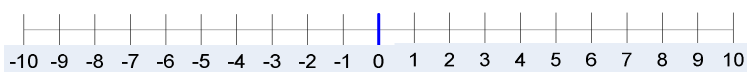
ג. $|2|$



ד. $|-6|$



ה. $|3|$



שאלה 2

מצא את ערכו של כל אחד המערכים המוחלטים הבאים :

א. $|5|$

ב. $|-19|$

ג. $|0|$

ד. $|6+1|$

ה. $|15-9|$

ו. $|9-15|$

ז. $|1-7+15-23|$

ח. $|(-6)\cdot 7+13|$

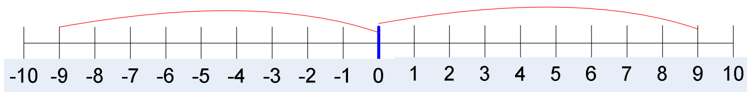
ט. $|18\div(-3)+4|$

י. $|21\div 3-8\div 2+4-5|$

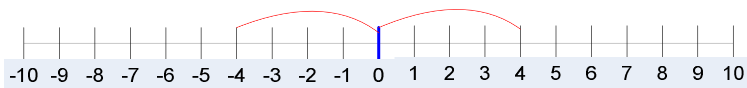
פתרונות לתרגילים במהו הערך המוחלט

שאלה 1

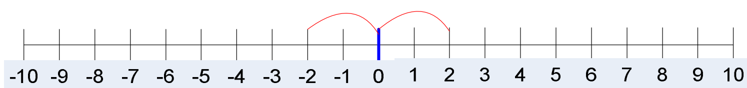
א. $|9|$



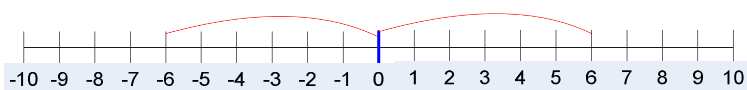
ב. $|-4|$



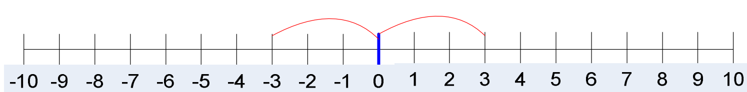
ג. $|2|$



ד. $|-6|$



ה. $|3|$



שאלה 2

א. $|5|=5$

ב. $|-19|=-(-19)=19$

ג. $|0|=0$

ד. $|6+1|=|7|=7$

ה. $|15-9|=|6|=6$

ו. $|9-15|=|-6|=-(-6)=6$

ז. $|1-7+15-23|=|-6+15-23|=|9-23|=|-14|=-(-14)=14$

ח. $|(-6)\cdot 7+13|=|-42+13|=|-29|=-(-29)=29$

ט. $|18\div(-3)+4|=|-6+4|=|-2|=-(-2)=2$

י. $|21\div 3-8\div 2+4-5|=|7-8\div 2+4-5|=|7-4+4-5|=|3+4-5|=|7-5|=|2|=2$

תכונות הערך המוחלט

1) לכל $a \neq 0$ מתקיים $|a| > 0$. כלומר הערך המוחלט של כל מספר השונה מ- 0 הוא חיובי.
ההוכחה לתכונה זו היא פשוטה מאוד ונובעת מהגדרת הערך המוחלט.
לפי הגדרת הערך המוחלט אם $a > 0$ אז $|a| > 0$, ואם $a < 0$ אז $|a| = -a > 0$, ולכן בכל מקרה אם מתקיים $a \neq 0$ אז $|a| > 0$.

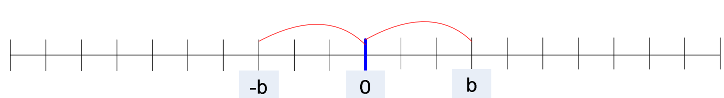
2) לכל מספר ממשי a מתקיים: $|a| = |-a|$.
ההוכחה לתכונה זו היא פשוטה מאוד ונובעת מהגדרת הערך המוחלט.
לפי הגדרת הערך המוחלט אם $a > 0$ אז $|a| = a$, אז אם $a > 0$ כמובן שמתקיים כי $-a < 0$.
לכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|-a| = -(-a) = a$, וביחד נקבל כי $|a| = a = -(-a) = |-a|$.
מצד שני, לפי הגדרת הערך המוחלט אם $a < 0$ אז $|a| = -a$, אז אם $a < 0$ מתקיים כי $-a > 0$.
לכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|-a| = -a$, וביחד נקבל כי $|a| = -a = |-a|$.
עבור המקרה בו $a = 0$, מכיוון שמתקיים $0 = -0$ אז כמובן $|0| = |-0| = 0$ ולכן לכל a: $|a| = |-a|$.

3) אם $b > 0$, אז קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x| = b$ והם: $x = b$ ו- $x = -b$.
גם תכונה זו נובעת ישירות מהגדרת הערך המוחלט.
לפי הגדרת הערך המוחלט אם $x > 0$ אז $|x| = x$, ולכן מכיוון שנתון כי $b > 0$ אז $|x| = x = b$ ולכן $x = b$.
אך אם $x < 0$ אז $|x| = -x$, ולכן מכיוון שנתון כי $b > 0$ אז $|x| = -x = b$ ולכן $x = -b$.

4) הערך המוחלט של מכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים, כלומר: $|ab| = |a| \cdot |b|$.
ההוכחה לתכונה זו תלויה בסימנים מתמטיים.
<u>לפי תכונות הכפל</u>:
א) אם $a,b > 0$ אז $a \cdot b > 0$.
ב) אם $a,b < 0$ אז $a \cdot b > 0$.
ג) אם $a = 0$ או $b = 0$ אז $a \cdot b = 0$.
ד) אם $a < 0, b > 0$ או $a > 0, b < 0$ אז $a \cdot b < 0$.
אם $a,b > 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a| = a, |b| = b$ ולכן $|a| \cdot |b| = a \cdot b$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b > 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = a \cdot b$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
אם $a,b < 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a| = -a, |b| = -b$ ולכן $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b > 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = a \cdot b$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
אם $a = 0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a| = 0$ ולכן $|a| \cdot |b| = 0 \cdot |b| = 0$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b = 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = |0 \cdot b| = |0| = 0$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
אם $b = 0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|b| = 0$ ולכן $|a| \cdot |b| = |a| \cdot 0 = 0$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b = 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = |a \cdot 0| = |0| = 0$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
אם $a < 0, b > 0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a| = -a, |b| = b$ ולכן $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b) = -ab$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b < 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = -ab$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
אם $a > 0, b < 0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a| = a, |b| = -b$ ולכן $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b) = -ab$ ומכיוון שלפי תכונות הכפל $a \cdot b < 0$, אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a \cdot b| = -ab$ ולכן $|ab| = |a| \cdot |b|$.
כל המקרים נבדקו, ובכולם התקבל כי $|ab| = |a| \cdot |b|$ כנדרש.

5) אי-שוויון המשולש: הערך המוחלט של הסכום קטן מסכום הערכים המוחלטים או שווה לו.
בסימון מתמטי, אי-שוויון המשולש הוא: $|a+b| \le |a|+|b|$.
ההוכחה לתכונה זו תלויה בסימנים מתמטיים.
<u>לפי תכונות החיבור</u>:
א) אם $a,b>0$ אז $a+b>0$.
ב) אם $a,b<0$ אז $a+b<0$.
ג) אם $a=0$ אז $a+b=b$ ואם $b=0$ אז $a+b=a$.
אם $a,b>0$ אז $a+b>0$ ולכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=a, |b|=b, |a+b|=a+b$, כלומר מתקיים $|a+b|=|a|+|b|$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a,b<0$ אז $a+b<0$ ולכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=-a, |b|=-b, |a+b|=-(a+b)=-a-b$, כלומר מתקיים $|a+b|=|a|+|b|$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a=0$ אז $a+b=b$ ולכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=0, |a+b|=|0+b|=|b|$ ולכן כמובן מתקיים $|a+b|=|b|=|0|+|b|$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $b=0$ אז $a+b=a$ ולכן לפי הגדרת הערך המוחלט $|b|=0, |a+b|=|a+b|=|a|$ ולכן כמובן מתקיים $|a+b|=|a|=|a|+|0|$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a>0, b<0$, ייתכן כי הסכום חיובי וייתכן כי הוא שלילי.
אם $a+b>0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=a, |b|=-b, |a+b|=a+b$ ולכן מתקיים $|a+b|=a+b \le |a|+|b|=a-b$ (נזכור כי b שלילי ולכן $-b$ חיובי), ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a+b<0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=a, |b|=-b, |a+b|=a+b$ ולכן מתקיים $|a+b|=-(a+b)=-a-b \le |a|+|b|=a-b$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a<0, b>0$, ייתכן כי הסכום חיובי וייתכן כי הוא שלילי.
אם $a+b>0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=a, |b|=-b, |a+b|=a+b$ ולכן מתקיים $|a+b|=a+b \le |a|+|b|=-a+b$ (נזכור כי a שלילי ולכן $-a$ חיובי), ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
אם $a+b<0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|a|=a, |b|=-b, |a+b|=-a-b$ ולכן מתקיים $|a+b|=-(a+b)=-a-b \le |a|+|b|=-a+b$, ובפרט $|a+b| \le |a|+|b|$.
כל המקרים נבדקו, ובכולם התקבל כי $|a+b| \le |a|+|b|$ כנדרש.

6) $|x|<b$ אם ורק אם $-b<x<b$.
מכיוון שהערך המוחלט מסמן את המרחק שבין x לבין ראשית הצירים, הרי שמתקיים כי אם b הוא מספר חיובי כלשהו, אז $|x|<b$ פירושו כי מרחקו של x מראשית הצירים קטן מ- b. אז x חייב להימצא בתוך הקטע שקצותיו הם b ו- $-b$ כלומר:



הוכחה פורמלית: אם $x>0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|x|=x$ ולכן $|x|=x<b$ פירושו $x<b$.
אם $x<0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $|x|=-x$ ולכן $|x|=-x<b$ פירושו $x>-b$ (כי הרי כפל במספר שלילי הופך את סימן אי השוויון), ולכן ביחד נקבל כי $-b<x<b$ כמבוקש.

תרגילים בתכונות הערך המוחלט

1) מהם כל המספרים הממשיים שעבורם מתקיים $|x|=5$? (לפי הגדרת הערך המוחלט בלבד)

2) מצא את כל פתרונות המשוואה $|x|=6$.

3) מצא את כל פתרונות המשוואה $|x|=-6$.

4) מצא את כל פתרונות המשוואה $|x|=0$.

5) מהם כל המספרים הממשיים שעבורם מתקיים $|x-3|=5$?

6) מהם כל המספרים הממשיים שעבורם מתקיים $|x-a|\le b$?

7) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים. להלן מספר משפטים. עבור כל משפט ציין אם הוא נכון או לא נכון. אם המשפט נכון, הוכח אותו. אם המשפט אינו נכון, הבא דוגמה נגדית:

א. $|a\cdot b|=|-a|\cdot|-b|$.

ב. $|a\cdot b|=-|a|\cdot|-b|$.

ג. $|a\cdot b|<|a|\cdot|b|$.

ד. אם $b\ne 0$ אז $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

ה. $|a+b|\ge|a|-|b|$.

ו. $|a+b|>\max\left(|a|,|b|\right)$.

ז. $|a+b|\le\max\left(|a|,|b|\right)$.

ח. $|a|\ge b$ אם ורק אם $a\ge b$ או $a\le -b$.

פתרונות תרגילים בתכונות הערך המוחלט

1) לפי הגדרת הערך המוחלט, אם $x>0$ אז $|x|=x$ מכיוון שנתון $|x|=5$, נקבל כי $x=5$.
אם $x<0$ אז $|x|=-x$ מכיוון שנתון $|x|=5$, נקבל כי $-x=5$ כלומר $x=-5$.

2) לפי תכונה 3, אם $b>0$, אז קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x|=b$ והם: $x=b$ ו- $x=-b$.
מכיוון שמתקיים $6>0$ אז פתרונות המשוואה הם: $x=6$ ו- $x=-6$.

3) לפי תכונה 1, לכל $a\neq 0$ מתקיים $|a|>0$. לכן לא ייתכן כי $|x|=-6<0$ ולכן אין פתרון למשוואה.

4) לפי הגדרת הערך המוחלט מתקיים $|0|=0$ ולכן $x=0$.

5) לפי הגדרת הערך המוחלט, אם $x>0$ אז $|x|=x$. לכן אם $x>0$ אז $|x-3|=x-3$. במקרה הזה המשוואה אותה יש לפתור היא: $x-3=5$ שפתרונה הוא $x=8$.
לפי הגדרת הערך המוחלט, אם $x<0$ אז $|x|=-x$. לכן אם $x<0$ אז $|x-3|=-(x-3)=3-x$.
במקרה הזה המשוואה אותה יש לפתור היא: $3-x=5$ שפתרונה הוא $x=-2$.
לסיכום: למשוואה יש 2 פתרונות והם $x=8$ ו- $x=-2$.

6) אם $|x-a|=b$, אז פותרים כמו בשאלה 5.
לפי הגדרת הערך המוחלט, אם $x>0$ אז $|x|=x$. לכן אם $x>0$ אז $|x-a|=x-a$. במקרה הזה המשוואה אותה יש לפתור היא: $x-a=b$ שפתרונה הוא $x=a+b$.
לפי הגדרת הערך המוחלט, אם $x<0$ אז $|x|=-x$. לכן אם $x<0$ אז $|x-a|=-(x-a)=a-x$.
במקרה הזה המשוואה אותה יש לפתור היא: $a-x=b$ שפתרונה הוא $x=a-b$.
אבל במקרה של $|x-a|<b$, לפי תכונה 6, $|x|<b$ אם ורק אם $-b<x<b$. לכן $|x-a|<b$ אם ורק אם $-b<x-a<b$ או $a-b<x<a+b$.
לסיכום: הפתרון הסופי הוא $a-b\leq x\leq a+b$.

7) נוכיח / נפריך את כל הסעיפים.

א. הטענה $|a\cdot b|=|-a|\cdot|-b|$ נכונה. לפי תכונה 2, לכל מספר ממשי a מתקיים: $|a|=|-a|$, ולכן $|-a|\cdot|-b|=|a|\cdot|b|$. לפי תכונה 4, $|ab|=|a|\cdot|b|$ ולכן $|ab|=|a|\cdot|b|=|-a|\cdot|-b|$.

ב. הטענה $|a\cdot b|=-|a|\cdot|-b|$ אינה נכונה. נפריך את הטענה על ידי דוגמה נגדית. נבחר $a=3,b=2$ אז $|a\cdot b|=|3\cdot 2|=|6|=6\neq -6=(-3)\cdot 2=-|3|\cdot|-2|=-|a|\cdot|-b|$.

ג. הטענה $|a\cdot b|<|a|\cdot|b|$ אינה נכונה. היא עומדת בסתירה לתכונה 4, $|ab|=|a|\cdot|b|$.

ד. הטענה אם $b\neq 0$ אז $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ נכונה. לפי תכונה 4, $|ab|=|a|\cdot|b|$, ולכן בודאי $\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\left|\frac{1}{b}\right|$, אבל $|1|=1$ ולכן $\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\frac{1}{|b|}$ ומתקבל $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

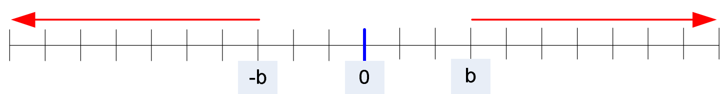
ה. הטענה $|a+b|\geq|a|-|b|$ נכונה. לפי משפט אי-שוויון המשולש מתקיים $|a+b|\leq|a|+|b|$.
לכן, לפי משפט אי-שוויון המשולש מתקיים: $|a|=|(a+b)+(-b)|\leq|a+b|+|-b|$. אבל לפי תכונה 2, לכל מספר ממשי a מתקיים: $|a|=|-a|$ ולכן $|a|\leq|a+b|+|-b|=|a+b|+|b|$.
נעביר אגפים ונקבל: $|a|-|b|\leq|a+b|$.

ו. הטענה $|a+b|>\max(|a|,|b|)$ אינה נכונה. נפריך את הטענה על ידי דוגמה נגדית. נבחר $a=-3,b=2$, אז: $|a+b|=|-3+2|=|-1|=1\not>3=\max(3,2)=\max(|a|,|b|)$.

ז. הטענה $\left|a+b\right|\le\max\left(\left|a\right|,\left|b\right|\right)$ אינה נכונה. נפריך את הטענה על ידי דוגמה נגדית. נבחר $a=3, b=2$, אז: $\left|a+b\right|=\left|3+2\right|=\left|5\right|=5\not\le 3=\max\left(3,2\right)=\max\left(\left|a\right|,\left|b\right|\right)$.

ח. הטענה $\left|a\right|\ge b$ אם ורק אם $a\ge b$ או $a\le -b$ נכונה.

מכיוון שהערך המוחלט מסמן את המרחק שבין a לבין ראשית הצירים, הרי שמתקיים כי אם b הוא מספר חיובי כלשהו, אז $\left|a\right|>b$ פירושו כי מרחקו של a מראשית הצירים גדול מ- b. אז a חייב להימצא <u>מחוץ</u> לקטע שקצותיו הם b ו- $-b$ כלומר:



הוכחה פורמלית: אם $a>0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $\left|a\right|=a$ ולכן $\left|a\right|=a>b$ פירושו $a>b$. אם $a<0$ אז לפי הגדרת הערך המוחלט $\left|a\right|=-a$ ולכן $\left|a\right|=-a>b$ פירושו $a<-b$ (כי הרי כפל במספר שלילי הופך את סימן אי השוויון), ולכן ביחד נקבל כי $a>b$ או $a<-b$.
אם $\left|a\right|=b$ אז לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $\left|a\right|=b$ והם: $a=b$ ו- $a=-b$. ביחד נקבל כי $\left|a\right|\ge b$ אם ורק אם $a\ge b$ או $a\le -b$ כמבוקש.

סיכום הגדרת ותכונות הערך המוחלט

הגדרת הערך המוחלט:

$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא חיובי אז $|x|=x$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא שלילי אז $|x|=-x$

אם הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא אפס אז $|0|=0$

תכונות הערך המוחלט:

1) לכל $a\neq 0$ מתקיים $|a|>0$. כלומר הערך המוחלט של כל מספר השונה מ- 0 הוא חיובי.
2) לכל מספר ממשי a מתקיים: $|a|=|-a|$.
3) אם $b>0$, אז קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x|=b$ והם: $x=b$ ו- $x=-b$.
4) הערך המוחלט של מכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים, כלומר: $|ab|=|a|\cdot|b|$.
5) אי-שוויון המשולש: הערך המוחלט של הסכום קטן מסכום הערכים המוחלטים או שווה לו.
בסימון מתמטי, אי-שוויון המשולש הוא: $|a+b|\leq|a|+|b|$.
6) $|x|<b$ אם ורק אם $-b<x<b$.

נוסיף בשלב זה תכונה נוספת של הערך המוחלט, שלא נוכיח: $\sqrt{x^2}=|x|$.

פתרון משוואות עם ערך מוחלט

לפי תכונה 3, אם $b > 0$, אז קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x| = b$ והם: $x = b$ ו- $x = -b$.
כך למשל הפתרונות של המשוואה $|x| = 5$ הם $x = 5$ ו- $x = -5$.

נוסיף בשלב זה תכונה נוספת של הערך המוחלט, שלא נוכיח: $\sqrt{x^2} = |x|$.

כאשר הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא מסובך יותר, עדיין נעבוד לפי תכונה זו. נראה דוגמאות:

שאלה

מהם פתרונות המשוואה $|x+2| = 8$?

פתרון

לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה והם: $x+2 = 8$, כלומר $x = 6$, ו- $x+2 = -8$ כלומר $x = -10$.

שאלה

מהם פתרונות המשוואה $|x^2 - 4| = 5$?

פתרון

לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה והם:

$$x^2 - 4 = 5$$
$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

הפתרון השני הוא:

$$x^2 - 4 = -5$$
$$x^2 = -1$$

ואין למשוואה זו פתרון מכיוון שתמיד מתקיים $a^2 \geq 0$.
לכן, למשוואה הזו יש 2 פתרונות והם $x = 3$ ו- $x = -3$.

הדרך הזו לפתרון, היא נוחה וקלה לרוב, אך לא תמיד. כיצד נפתור למשל את השאלה הבאה:

שאלה

מהם פתרונות המשוואה $\big||2x+1| - |2x-1|\big| = 2$?

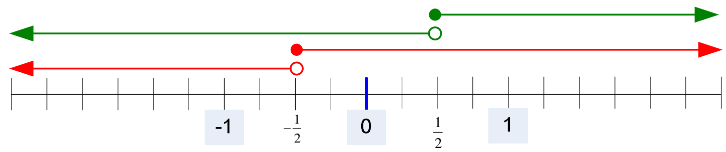
פתרון

קשה מאוד לפתור משוואות מסובכות כאלה באמצעות תכונה 3. משוואות כאלה נפתור ע"י שימוש ישיר בהגדרת הערך המוחלט.
לפי הגדרת הערך המוחלט מתקיים:

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & 2x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & x < -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & 2x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & x < \frac{1}{2} \end{matrix}$$

אז נפריד לתחומים ובכל אחד מהם נפתור את המשוואה.



הציור לעיל מתאר את החלוקה לתחומים. חץ שתחילתו עיגול חלול מסמן כי התחום אינו כולל את הנקודה (קטן ממש), בעוד חץ שתחילתו מלא, כולל את הנקודה. באדום מסומנים התחומים של $|2x+1|$ ובירוק מסומנים התחומים של $|2x-1|$.

התחום $x \geq \frac{1}{2}$:

במקרה זה מתקיים $|2x-1| = 2x-1$, $|2x+1| = 2x+1$, נציב בשוויון המקורי:

$$||2x+1|-|2x-1|| = 2$$
$$|(2x+1)-(2x-1)| = 2$$
$$|2x+1-2x+1| = 2$$
$$|2| = 2$$

זהו פסוק אמת ולכן השוויון מתקיים לכל x בתחום הזה. כלומר הפתרון הוא $x \geq \frac{1}{2}$.

התחום $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$:

במקרה זה מתקיים $|2x-1| = -(2x-1)$, $|2x+1| = 2x+1$, נציב בשוויון המקורי:

$$||2x+1|-|2x-1|| = 2$$
$$|(2x+1)-(-(2x-1))| = 2$$
$$|2x+1+2x-1| = 2$$
$$|4x| = 2$$
$$|4|\cdot|x| = 2$$
$$4\cdot|x| = 2$$
$$|x| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x| = \frac{1}{2}$ והם: $x = \frac{1}{2}$ ו- $x = -\frac{1}{2}$.

אבל התחום שלנו הוא $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ שאינו כולל את הנקודה $x = \frac{1}{2}$ ולכן הפתרון היחיד הוא $x = -\frac{1}{2}$.

התחום $x<-\frac{1}{2}$:

במקרה זה מתקיים $|2x-1|=-(2x-1)$, $|2x+1|=-(2x+1)$, נציב בשוויון המקורי:

$$||2x+1|-|2x-1||=2$$
$$|-(2x+1)-(-(2x-1))|=2$$
$$|-2x-1+2x-1|=2$$
$$|-2|=2$$

זהו פסוק אמת ולכן השוויון מתקיים לכל x בתחום הזה. כלומר הפתרון הוא $x<-\frac{1}{2}$.

סיימנו לבדוק את כל התחומים, ולכן נעבור עכשיו לקבוצת הפתרונות שהיא מערכת "או" של הפתרונות.

לכן הפתרון הכולל של המשוואה הוא: $x\ge\frac{1}{2}$ או $x=-\frac{1}{2}$ או $x<-\frac{1}{2}$ כלומר $x\ge\frac{1}{2}$ או $x\le-\frac{1}{2}$.

שאלה

מהם פתרונות המשוואה $|2x+|x-2||=1$?

פתרון

לפי הגדרת הערך המוחלט מתקיים:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & x-2\ge 0 \Rightarrow & x-2 & x\ge 2 \\ -(x-2) & x-2<0 \Rightarrow & -(x-2) & x<2 \end{cases}$$

אז נפריד לתחומים ובכל אחד מהם נפתור את המשוואה.

התחום $x\ge 2$:

במקרה זה מתקיים $|x-2|=x-2$, נציב בשוויון המקורי:

$$|2x+|x-2||=1$$
$$|2x+x-2|=1$$
$$|3x-2|=1$$

לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|3x-2|=1$ והם: $3x-2=1$ ו- $3x-2=-1$.

עבור $3x-2=1$ נקבל כי $x=1$ ועבור $3x-2=-1$ נקבל כי $x=\frac{1}{3}$. שני הפתרונות הללו אינם מתאימים לתחום שלנו $x\ge 2$, ולכן אין לתחום זה פתרון.

התחום $x<2$:

במקרה זה מתקיים $|x-2|=-(x-2)=2-x$, נציב בשוויון המקורי:

$$|2x+|x-2||=1$$
$$|2x+2-x|=1$$
$$|x+2|=1$$

לפי תכונה 3, קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x+2|=1$ והם: $x+2=1$ ו- $x+2=-1$.

עבור $x+2=1$ נקבל כי $x=-1$ ועבור $x+2=-1$ נקבל כי $x=-3$. שני הפתרונות מתאימים לתחום זה.
סיימנו לבדוק את כל התחומים, ולכן נעבור עכשיו לקבוצת הפתרונות שהיא מערכת "או" של הפתרונות.
לכן הפתרון הכולל של המשוואה הוא $x=-1$ או $x=-3$.

סיכום פתרון משוואות עם ערך מוחלט

משוואות פשוטות פותרים ע״י שימוש בתכונה 3 האומרת כי אם $b > 0$, אז קיימים בדיוק שני פתרונות למשוואה $|x| = b$ והם: $x = b$ ו- $x = -b$.

משוואות מסובכות יותר פותרים ע״י שימוש ישיר בהגדרת הערך המוחלט.
כל ערך מוחלט מפרקים לפי ההגדרה, ומוצאים את התחומים לפיהם יש לפתור משוואות שונות.
אז, עבור כל תחום פותרים את המשוואה וכשמסיימים לבדוק את כל התחומים, מקבלים את קבוצת הפתרונות שהיא מערכת ״או״ של הפתרונות לפי תחומים.