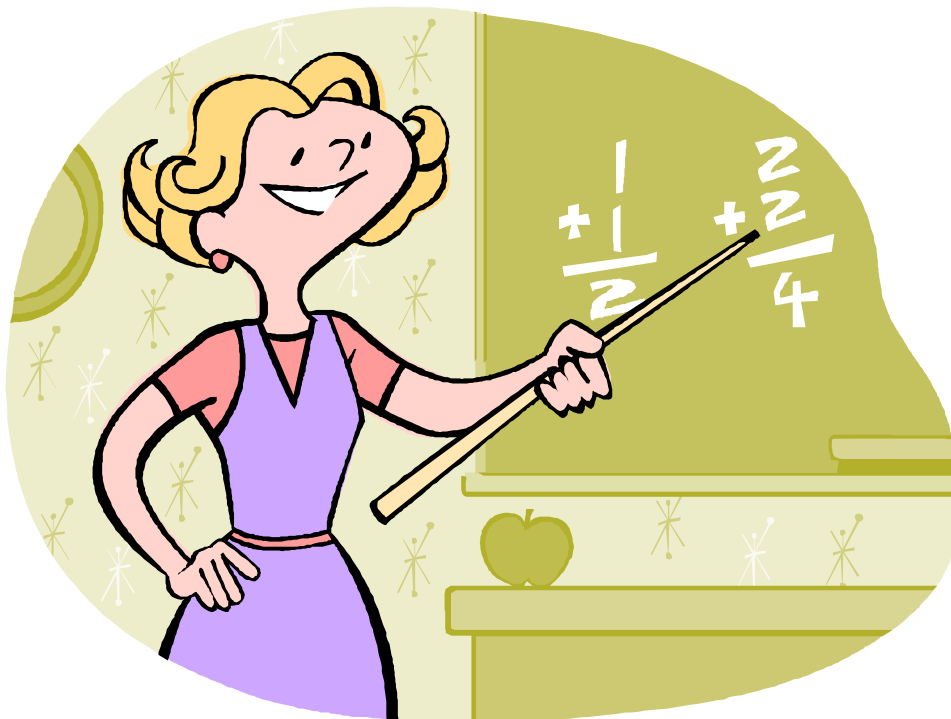


נוסחאון במתמטיקה

5 יח"ל תכנית חדשה



הנוסחאון ברובו מתאים גם לתכנית הלימודים החדשה של 4 יח"ל

ערך והדפיס
אלון קרפן

חורף תשס"ג / ינואר 2003

ריכוז החומר והנוסחאות לבחינת הבגרות במתמטיקה 5 יח"ל (תכנית חדשה)

הקדמה

להלן ריכוז כל החומר והנוסחאות לקראת בחינת הבגרות במתמטיקה (תכנית חדשה – פרקים 1-10). החומר מסודר לפי פרקי לימוד ומובא בראשי פרקים בתוכן העניינים. בפרק 6 מופיע ריכוז הנוסחאות בסדרות – מומלץ לתלמיד הרוצה לחזור על אינדוקציה מתמטית (תרגילים מספרים ומבחינות) לחזור על פרק 6 ולהבין את הקשר בין סדרות ואינדוקציה מתוך תרגילים שונים. פרק 11 מהווה חזרה כללית על האלגברה הבסיסית ומשוואות ריבועיות. פרק 12 כולל בתוכו נוסחאות של קומבינטוריקה, סטטיסטיקה והסתברות. פרק 13 והאחרון מהווה חזרה על יסודות גיאומטריים מחטיבת הביניים. בסוף הנוסחאון תמצא שני עמודים בהם תוכל למלא רשימות אישיות שלך בנוגע לחומר ועוד עמוד אחד ובו תוכל לציין הערות, הארות ותיקונים לעורך בנוגע לתוכן של הנוסחאון. אשמח לקבל גם כל הצעה לשיפור.

בהצלחה,
אלון קרפן

תוכן העניינים

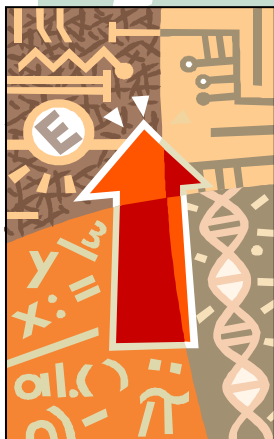
2	גיאומטריה.....	(1)
6	הנדסה אנליטית.....	(2)
10	מספרים קומפלקסים (מרוכבים).....	(3)
12	טריגונומטריה ויישומים במישור.....	(4)
18	הנדסת המרחב.....	(5)
28	סדרות.....	(6)
29	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.....	(7)
34	פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (כולל נוסחאות חישוב), מערכת E ומערכת L.....	(8)
35	וקטורים.....	(9)
38	חקירת מערכות משוואות.....	(10)
39	טכניקה אלגברית ומשוואות ריבועיות.....	(11)
40	קומבינטוריקה, סטטיסטיקה והסתברות.....	(12)
41	חזרה על יסודות גיאומטריים מחטיבת הביניים.....	(13)

צרכ והדפיס אילון קרפן, י"ה 12
שנה"ל התשס"א (2000/01)

תודה לפיליפס זילצין על שהיה אבדק את הנוסחאות

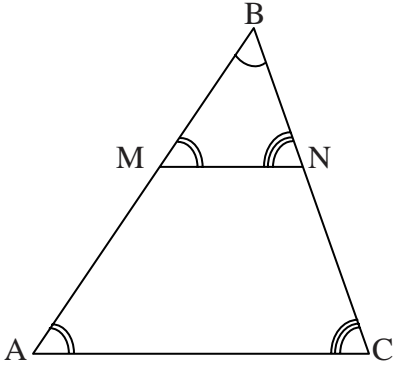
רוב תודות למורה לאוניד וינהראנד על הייצור
המתמטי הציבורי והתוכן של הנוסחאון זה

מהדורה מס' 3 – חורף תשס"ג / ינואר 2003



נושא מס' 1: גיאומטריה

(1) משפטי תלס ודמיון משולשים



(א) אם נתון כי הקטע MN מקביל לצלע המשולש AC אזי:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}$$

(ב) משפטי דמיון המשולשים:

(1) ז.ז.ז (שלושה זוגות של זוויות שוות).

(2) צ.צ.צ (שלושה זוגות של צלעות פרופורציוניות).

(3) צ.ז.צ (שני זוגות של צלעות פרופורציוניות וזווית שווה)

הכלואה ביניהן).

(ג) מן דמיון המשולשים נובעות הזהויות הבאות השוות למקדם הדמיון:

$$k = \frac{h_1}{h_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{p_1}{p_2} ; k = \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$

(ד) מן דמיון המשולשים נובעות הזהויות הבאות השוות למקדם הדמיון בריבוע:

$$K^2 = \frac{S_{\Delta_1}}{S_{\Delta_2}} \quad (\text{היחס בין שטחי המשולשים, וכמו כן היחס בין השטחים של המעגלים החוסמים})$$

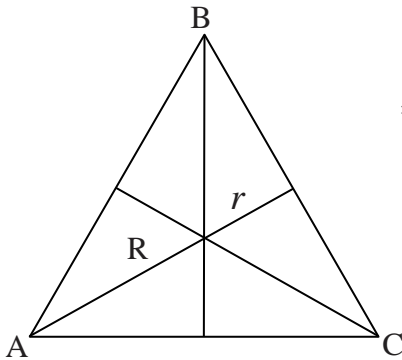
היחס בין השטחים של המעגלים החסומים).

(ה) פרופורציות בין צלעות באותו המשולש:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

↓

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$



(2) משולש שווה צלעות

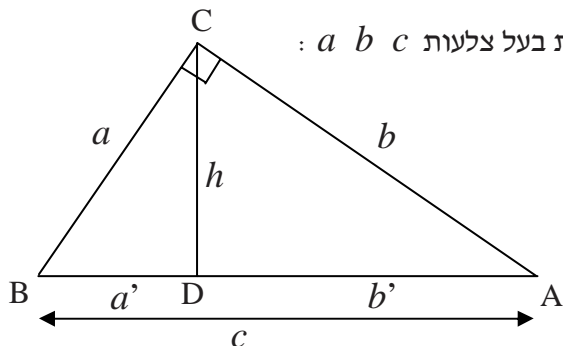
הגדלים הבאים קבועים בכל משולש שווה צלעות שצלעו a :

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(3) משולש ישר זווית

להלן תכונות ומשפטים הנכונים בכל משולש ישר זווית בעל צלעות a b c :



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad h^2 = a' \cdot b'$$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ \quad b^2 = c \cdot b'$$

$$\angle C = 90^\circ \quad a^2 = c \cdot a'$$

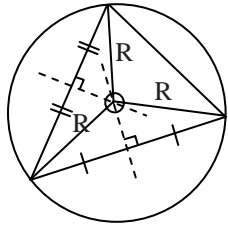
$$2R = c \quad a \cdot b = h \cdot c$$

$$2r = a + b - c \quad h = \frac{a \cdot b}{c}$$

(4) מעגל חוסם משולש ומעגל חסום במשולש

(א) בכל מעגל החוסם משולש מתקיימות התכונות הבאות:

- (1) מרכז המעגל החוסם הוא נקודה חיתוך של אנכים אמצעיים והוא נמצא במרחקים שווים מהקודקודים.

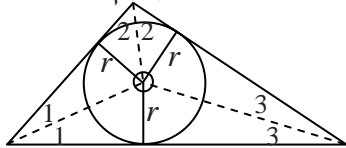


- (2) אם משולש הוא חד זווית אז מרכז המעגל נמצא בתוך המשולש.
 (3) אם משולש הוא קהה זווית אז מרכז המעגל נמצא מחוץ למשולש.
 (4) אם משולש הוא ישר זווית אז מרכז המעגל נמצא על היתר.

(5) בכל משולש מתקיים: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S_{\Delta}}$

(ב) בכל מעגל החסום במשולש מתקיימות התכונות הבאות:

- (1) מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש של חוצי זוויות והוא נמצא במרחקים שווים מהצלעות.



- (2) מרכז המעגל החסום תמיד נמצא בתוך המשולש.
 (3) מכל משולש מתקיים: $S_{\Delta} = r \cdot p$ (p – חצי היקף).

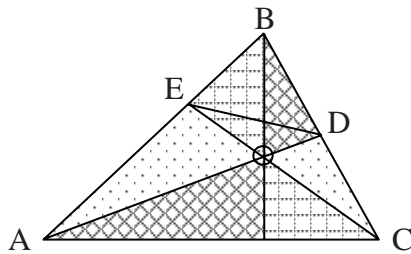
(5) גבהים במשולש

(א) נקודת החיתוך של גבהים נקראת אורטוסנטר.

(ב) נקודת החיתוך מחלקת כל גובה לשני קטעים שמכפלתם שווה

$AO \cdot OD = BO \cdot OF = CO \cdot OE$

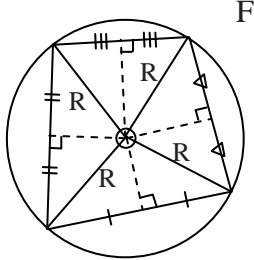
(ג) נוצר דימיון המשולשים הבא, לדוגמא: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$



(6) מעגל חוסם מרובע ומעגל חסום במרובע

(א) בכל מרובע החסום ע"י מעגל מתקיימות התכונות הבאות:

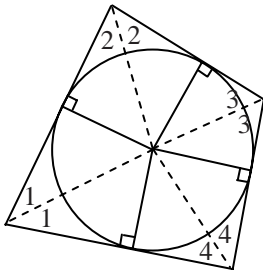
- (1) סכום זוג זוויות נגדיות במרובע הוא 180.
 (2) מרכז המעגל החוסם הוא נקודת החיתוך של אנכים אמצעיים.



(ב) בכל מרובע החוסם מעגל מתקיימות התכונות הבאות:

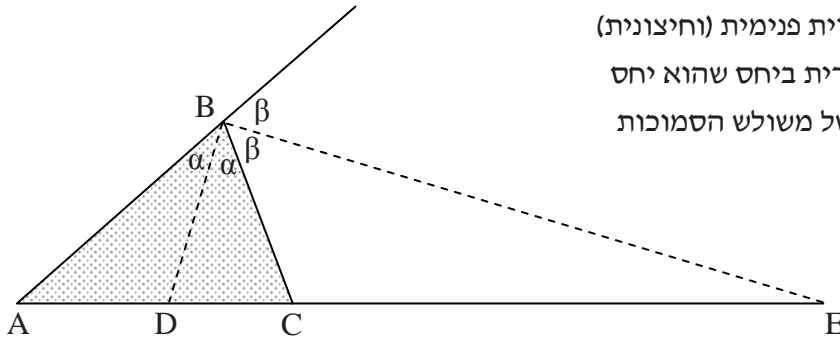
- (1) סכומי זוגות צלעות נגדיות שווים.
 (2) מרכז המעגל החסום הוא נקודת החיתוך של חוצי זוויות.

(ג) כמו כן מתקיים היחס הבא: $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



(7) משפטי חוצי זווית

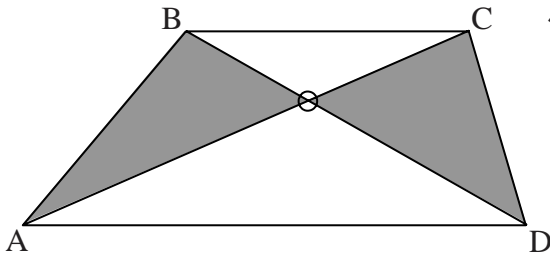
בכל משולש חוצה זווית פנימית (וחיצונית) מחלק את הצלע הנגדית ביחס שהוא יחס שתי צלעות אחרות של משולש הסמוכות לקטעים הנ"ל.



$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} & \text{חלוק פנימי} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} & \text{חלוק חיצוני} \end{cases}$$

(A,C,D,E) – רביעייה הרמונית ; D – חלוקה פנימית ; E – חלוקה חיצונית.

(8) פרופורציה בטרפז



(א) נקודת חיתוך של אלכסונים מחלקת כל אלכסון

$$\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{BC}{AD}$$

ביחס הבסיסים

(ב) אלכסונים של טרפז יוצרים עם בסיסים שני

$$k = \frac{AD}{BC}$$

משולשים דומים :

(ג) שטחי המשולשים הצבועים בציור באפור שווים.

(9) פרופורציה במעגל

(א) אם שני מיתרים נחתכים בנקודה M אז היא מחלקת את כל המיתר לשני קטעים שמכפלתם שווה.

$$a \cdot b = c \cdot d$$

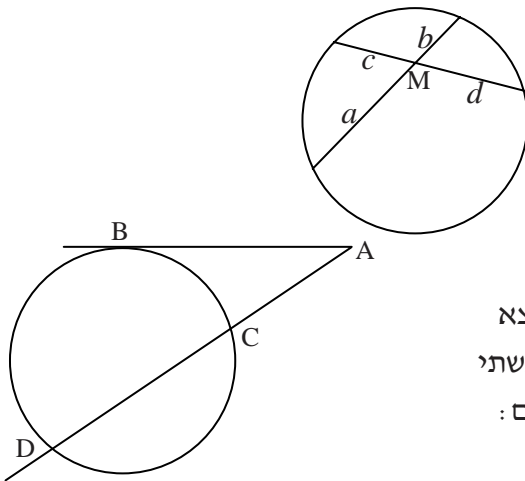
(ב) משיק (קטע היוצא מנקודה מחוץ למעגל

ונוגע בו בנקודה אחת) וחיתוך (הקטע היוצא

מנקודה מחוץ למעגל וחיתוך את המעגל בשתי

נקודות) היוצאים מאותה נקודה מקיימים :

$$AB^2 = AD \cdot AC$$



(10) משפטים נוספים

(א) אם במשולש ABC נתון כי AD חוצה זווית A אז מתקיים: $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

(ב) שטח משולש ניתן למצוא לפי נוסחה: $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

זוהי נוסחת הירון – בה p חצי היקף.

(ג) משפט ברמפוטא: $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$ שטח לכל מרובע

אשר ניתן לחוסמו במעגל; בנוסחא – p הוא חצי היקף.

(ג) מציאת שטח גיזרה אורך הקשת במעגל: $S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha^\circ}{360}$ $p = \frac{2\pi \cdot R \cdot \alpha^\circ}{360}$

(ד) משפט המקבילית בה d_1 ו- d_2 אלכסונים ו- a ו- b הצלעות: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

(ה) אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל ונחבר את נקודה זו עם מרכז המעגל נקבל קטע אשר

יהווה את חוצה הזווית שבין שני המשיקים.

(ו) במצולע בעל n צלעות, סכום הזוויות הוא: $(n-2) \cdot 180^\circ$.

(ז) במצולע בעל n צלעות, מספר האלכסונים הוא: $\frac{1}{2}n(n-3)$.

נושא מס' 2: הנדסה אנליטית

(1) הישר

(א) מרחק בין שתי נקודות: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

(ב) נקודה N המחלקת קטע מסוים ביחס k: $N\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$

(ג) נקודה N הנמצאת באמצע הקטע: $N\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(ד) נקודה N המהווה את מפגש התיכונים (מרכז הכובד): $N\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

(ה) שטח משולש ניתן למצוא לפי נוסחה: $S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$

(ו) הצורות השונות של משוואות הישר: $\begin{cases} y = ax + b \\ Ax + By + C = 0 \\ y - y_0 = a(x - x_0) \end{cases}$

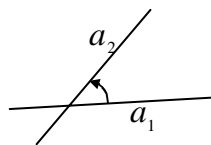
(ז) הצורות השונות בעזרתן ניתן למצוא שיפוע של ישר: $\begin{cases} a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ a = -\frac{A}{B} \\ a = y' \end{cases}$

(ח) ישרים מקבילים מקיימים: $\ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow a_1 = a_2$

(ט) ישרים מאונכים מקיימים: $\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

(י) מרחק מנקודה לישר מוצאים ע"י נוסחה: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(יא) זווית בין שני ישרים בעלי שיפוע ידוע: $\tan \varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 \cdot a_1}$



סימון הזווית φ נעשה תמיד נגד כיוון השעון. a_2 הוא השיפוע של הישר אליו סימנו את הזווית.

(2) המעגל

(א) משוואת המעגל הקנוני: $x^2 + y^2 = R^2$

(ב) משוואת מעגל שמרכזו בנקודה ששעוריה $M(a, b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

(ג) משוואת מעגל שמרכזו על ציר ה-y: $x^2 + (y - b)^2 = R^2$

(ד) משוואת מעגל שמרכזו על ציר ה-x: $(x - a)^2 + y^2 = R^2$

(ה) משוואת מעגל שמשיק לציר ה-x: $(x - a)^2 + (y \pm R)^2 = R^2$

(ו) משוואת מעגל שמשיק לציר ה-y: $(x \pm R)^2 + (y - b)^2 = R^2$

(ז) משוואת מעגל שמשיק לשני הצירים: $(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 = R^2$

(ח) אם נתון ישר שמשיק למעגל אז מרחק ממרכז המעגל לישר שווה לרדיוס המעגל.

- (ט) שיפוע המשיק למעגל קנוני בנקודה $A(m,n)$ שעליו הוא: $a = -\frac{m}{n}$
- (י) שיפוע הנורמל למעגל קנוני בנקודה $A(m,n)$ שעליו הוא: $a = \frac{n}{m}$
- (יא) משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו היא:
 $xx_1 + yy_1 = R^2$

- (יב) אם נתון שהישר $y = mx + n$ משיק למעגל $x^2 + y^2 = R^2$
 אזי מתקיים הקשר: $n^2 = R^2(m^2 + 1)$
- (יג) משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו היא:
 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$
- (יד) אם נתון שהישר $y = mx + n$ משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
 אזי מתקיים הקשר: $(ma - b + n)^2 = R^2(m^2 + 1)$

(3) האליפסה

- (א) המשוואה המפורשת של האליפסה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (ב) המשוואה הכללית של האליפסה הקנונית: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
- (ג) באליפסה שצירה הגדול נשען על ציר ה- x מתקיים:
 $F_{1,2}(\pm c, 0)$ (1)
 $c^2 = a^2 - b^2$ (2)
- (ד) באליפסה שצירה הגדול נשען על ציר ה- y מתקיים:
 $F_{1,2}(0, \pm c)$ (1)
 $c^2 = b^2 - a^2$ (2)
- (ה) יחס בין מרחק בין המוקדים לבין ציר הגדול של האליפסה נקרא **אקסצנטריות** של אליפסה. ככל שגודל זה קטן יותר אז המרחק בין המוקדים קטן והאליפסה דומה יותר למעגל. אקסצנטריות של מעגל היא אפס.

- (1) באליפסה בה הציר הגדול נשען על ציר ה- x מתקיים: $e = \frac{c}{a}$. במצב זה הישרים
 $x = \pm \frac{a^2}{c}$ נקראים מדריכים של אליפסה ומתקיים המשפט: בכל אליפסה יחס בין המרחקים מנקודה כלשהי על האליפסה עד המדריך ועד המוקד הקרוב הוא מספר קבוע השווה ל- $e = \frac{c}{a}$.
- (2) באליפסה בה הציר הגדול נשען על ציר ה- y מתקיים: $e = \frac{c}{b}$. במצב זה הישרים
 $y = \pm \frac{b^2}{c}$ נקראים מדריכים של אליפסה ומתקיים המשפט: בכל אליפסה יחס בין המרחקים מנקודה כלשהי על האליפסה עד המדריך ועד המוקד הקרוב הוא מספר קבוע השווה ל- $e = \frac{c}{b}$.

- (ו) שיפוע המשיק לאליפסה בנקודה $A(m,n)$ שעליה הוא: $a = -\frac{b^2m}{a^2n}$
- (ז) שיפוע הנורמל לאליפסה בנקודה $A(m,n)$ שעליה הוא: $a = \frac{a^2n}{b^2m}$
- (ח) משוואת המשיק לאליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה היא:
 $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(ט) אם נתון שהישר $y = mx + n$ משיק לאליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אזי מתקיים הקשר: $n^2 = a^2 m^2 + b^2$.

(4) ההיפרבולה

- (א) המשוואה המפורשת של האליפסה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- (ב) המשוואה הכללית של האליפסה הקנונית: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.
- (ג) מוקדי האליפסה:
- (1) אם משוואת האליפסה היא: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ אז המוקדים הם: $F_{1,2}(\pm c, 0)$.
- (2) אם משוואת האליפסה היא: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אז המוקדים הם: $F_{1,2}(0, \pm c)$.
- (ד) הפרמטרים של האליפסה מקיימים: $c^2 = a^2 + b^2$.
- (ה) לכל היפרבולה קיימות שתי אסימפטוטות שמשוואותיהן הן: $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$.
- (ו) אם ההיפרבולה שוות שוקיים אזי היא מקיימת: $x^2 + y^2 = a^2$ ומשוואות האסימפטוטות (המאונכות במקרה זה זו לזו) הן: $y = \pm x$.
- (ז) אם נסובב היפרבולה שוות שוקיים 45° מעלות נגד כיוון השעון נקבל גרף של פונקציה: $y = \frac{k}{x}$.
- (ח) שיפוע המשיק להיפרבולה בנקודה $A(m, n)$ שעליה הוא: $a = \frac{b^2 m}{a^2 n}$.
- (ט) שיפוע הנורמל להיפרבולה בנקודה $A(m, n)$ שעליה הוא: $a = -\frac{a^2 n}{b^2 m}$.
- (י) משוואת המשיק להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה היא:
- $$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$
- (יא) אם נתון שהישר $y = mx + n$ משיק להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ אזי מתקיים הקשר: $n^2 = a^2 m^2 - b^2$.

(5) הפרבולה

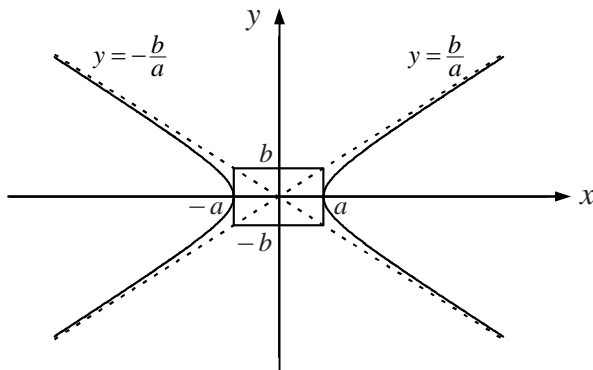
- (א) לפרבולה הקנונית מספר צורות. הפרמטר p מהווה את המרחק מהמוקד עד למדרון.
- (1) שנמצאת ברביעים #1 ו-#4, ומקיימת: $x = -\frac{p}{2}$ $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $y^2 = 2px$.
- (2) שנמצאת ברביעים #2 ו-#3, ומקיימת: $x = \frac{p}{2}$ $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ $y^2 = -2px$.
- (3) שנמצאת ברביעים #1 ו-#2, ומקיימת: $y = -\frac{p}{2}$ $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ $x^2 = 2py$.
- (4) שנמצאת ברביעים #3 ו-#4, ומקיימת: $y = \frac{p}{2}$ $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ $x^2 = -2py$.
- הערה: צורות (3) ו-(4) הן פונקציות ואילו (1) ו-(2) לא.

- (ב) שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה $A(m,n)$ שעליה הוא: $a = -\frac{m}{n}$
- (ג) שיפוע הנורמל לפרבולה בנקודה $A(m,n)$ שעליה הוא: $a = \frac{n}{m}$
- (ד) משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה היא: $yy_1 = p(x + x_1)$
- (ה) משוואת הנורמל לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה היא:
 $y_1x + py = y_1(p + x_1)$
- (ו) אם נתון שהישר $y = mx + n$ משיק לפרבולה $y^2 = 2px$
אזי מתקיים הקשר: $p = 2mn$

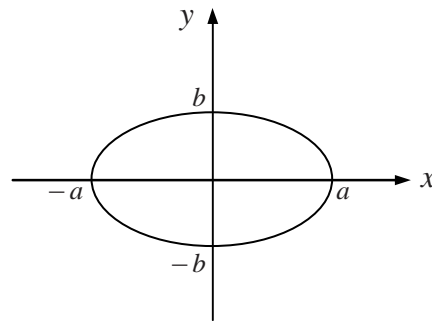
(6) מעגל אפולוניוס

מעגל אפולוניוס הוא מקום גיאומטרי של נקודות המקיימות את התנאי הבא: יחס בין מרחקים עד נקודה נתונה הוא מספר קבוע. אם ניקח לדוגמה קטע AB נוכל למצוא בין הנקודות נקודה C שתקיים את התנאי ומחוץ לנקודות (על המשך הקטע) נקודה D שגם תקיים את התנאי. שתי הנקודות הנ"ל נמצאות על מעגל אפולוניוס, כמו עוד אינסוף נקודות. $ABCD$ מהווה רביעייה הרמונית.

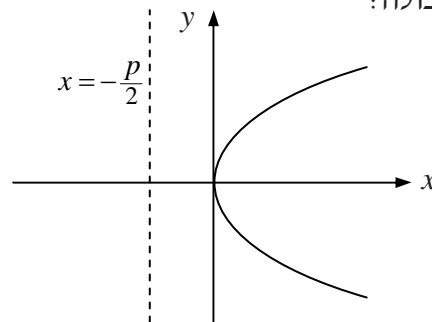
היפרבולה:



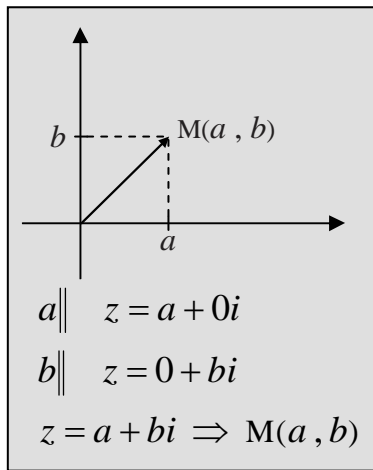
אליפסה:



פרבולה:



נושא מס' 3: מספרים קומפלקסים (מרוכבים)



(1) הגדרות בסיסיות של מספרים דמיוניים

- (א) $\sqrt{-1} = i$
- (ב) $i^2 = -1$
- (ג) $i^3 = -i$
- (ד) $i^4 = 1$
- (ה) $i^{(4n+k)} = i^k$

(2) מבנה המספר הקומפלקסי

- (א) $z = a + bi$ (מספר בעל חלק מדומה וחלק ממשי)
- (ב) $|x + yi| = |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (מודול של מספר מרוכב)

(3) פעולות חשבוניות על מספרים קומפלקסים

- לצורך הפעולות נגדיר: $z_1 = 3 + 7i$ $z_2 = 2 - 4i$
- (א) חיבור: $z_1 + z_2 = (3 + 7i) + (2 - 4i) = (3 + 2) + i(7 - 4) = 5 + 3i$
 - (ב) חיסור: $z_1 - z_2 = (3 + 7i) - (2 - 4i) = (3 - 2) + i(7 + 4) = 1 + 11i$
 - (ג) כפל: $z_1 \cdot z_2 = (3 + 7i) \cdot (2 - 4i) = 3 \cdot 2 - 7 \cdot (-4) + 3 \cdot (-4i) + 7i \cdot 2 = 34 + 2i$
 - (ד) העלאה בריבוע: $(z_1)^2 = (3 + 7i)^2 = 3^2 - 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7i = -40 + 42i$
 - (ה) העלאה בשלישית: $(z_2)^3 = (2 - 4i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 4i + 3 \cdot 2 \cdot (4i)^2 - (4i)^3 = 8 - 48i - 96 + 64i = -88 + 16i$
- (ו) הוצאת שורש:

$$\sqrt{-40 - 42i} = x + yi \quad / \uparrow^2$$

$$-40 - 42i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -40 \\ 2xyi = -42i \end{array} \right\}$$

מפתרון המשוואה (משוואה דו ריבועית ופתרון ע"י הצבת t) מקבלים את הפתרונות הבאים:

$$z = \pm(3 - 7i) \quad ; \quad x_{1,2} = \pm 3 \quad y_{1,2} = \mp 7$$

(ז) חילוק (מתבצע ע"י הכפלת המונה והמכנה במספר הצמוד למכנה):

$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{3-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

(4) מספרים צמודים ותכונות נוספות

- (א) אם נתון $z_1 = a + bi$ $z_2 = a - bi$ ונסמן את $z_1 = z$ אזי $z_2 = \bar{z}$
- (ב) התוצאות של הפעולות $z + \bar{z}$ ו- $z \cdot \bar{z}$ תמיד יתנו תוצאה ממשית:

$$z + \bar{z} = 2a \quad (1)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \quad (2)$$

- (ג) אם $z_1 = a + bi$ $z_2 = a - bi$ מהווים פתרונות של משוואה ריבועית שמקדמיה ממשיים אזי המשוואה היא: $x^2 - (z_1 + z_2)x + (z_1 \cdot z_2)$

(ד) אם למשוואה אלגברית (סכום חזקות), יש מקדמים ממשיים ונתון כי מספר קומפלקסי מסוים הוא פתרון של המשוואה אזי גם המספר הצמוד לו הוא פתרון.

(5) צורה טריגונומטרית של מספרים קומפלקסים

(א) מספר $a + bi$ ייוצג בצורה טריגונומטרית באופן הבא: $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
 (1) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) אם המספר ברביע הראשון אזי: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

אם המספר ברביע השני אזי: $\varphi = 180 - \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$

אם המספר ברביע השלישי אזי: $\varphi = 180 + \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$

אם המספר ברביע הרביעי אזי: $\varphi = 360 - \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$

(ב) נוסחאות דה-מואבר:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{cases} \quad (1) \text{ כפל:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2) \text{ חילוק:}$$

$$\cdot [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] \quad (3) \text{ העלאה בחזקה:}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \quad (4) \text{ הוצאת שורש:}$$

הערה: מציבים ב- n מ- 0 עד $(n-1)$.

נושא מס' 4: טריגונומטריה ויישומים במישור

(1) נוסחאות חישוב בסיסיות

$\sin(\pi+x) = -\sin x$	$\sin(\pi-x) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
$\cos(\pi+x) = -\cos x$	$\cos(\pi-x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
$\tan(\pi+x) = \tan x$	$\tan(\pi-x) = -\tan x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$
$\cot(\pi+x) = \cot x$	$\cot(\pi-x) = -\cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\tan x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$
$\sin(2\pi-x) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos x$	
$\cos(2\pi-x) = \cos x$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\sin x$	
$\tan(2\pi-x) = -\tan x$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cot x$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \cot x$	
$\cot(2\pi-x) = -\cot x$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\tan x$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \tan x$	

- סיכום:** על-מנת לגלות את הצד הימני של הנוסחה:
- (א) הסימן תלוי בפונקציה וברביע של גמר הסיבוב.
- (ב) בסיבובים שלמים נשמרת הפונקציה.
- (ג) בסיבובים עם חצאים הפונקציה משתנה.

(2) טבלת הפונקציות

x°	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	215	240	270	300	315	330	360
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	E
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	E	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	E	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
csec	E	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	E	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	E

אם קטע שאורכו שווה ל-1 ואחד מקצותיו מונח בראשית הצירים מסתובב סביב הראשית אז הקצה השני שלו הוא נקודה הנמצאת על המעגל שמשוואתו: $x^2 + y^2 = 1$. במשך הסיבוב, שיעורי הקצה משתנים. השיעורים של נקודה אחרי סיבובים משמעותיים מצויים בטבלה. השיעור הראשון של הנקודה הוא קוסינוס והשיעור השני הוא סינוס.

(3) נוסחאות לפתרון משוואות טריגונומטריות

(א) פונקציית sin

$$1) \sin x = m \quad [|m| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1]$$

$$x_1 = \arcsin m + 360k \quad ; \quad x_1 = \arcsin m + 2\pi k$$

$$x_2 = (180 - \arcsin m) + 360k \quad ; \quad x_2 = (\pi - \arcsin m) + 2\pi k$$

$$2) \sin x = \sin \alpha$$

$$x_1 = \alpha + 360k \quad ; \quad x_1 = \alpha + 2\pi k$$

$$x_2 = (180 - \alpha) + 360k \quad ; \quad x_2 = (\pi - \alpha) + 2\pi k$$

(ב) פונקציית cos

$$1) \cos x = m \quad [|m| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1]$$

$$x_1 = \arccos m + 360k \quad ; \quad x_1 = \arccos m + 2\pi k$$

$$x_2 = (360 - \arccos m) + 360k \quad ; \quad x_2 = (2\pi - \arccos m) + 2\pi k$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos m + 360k \quad ; \quad x_{1,2} = \pm \arccos m + 2\pi k$$

$$2) \cos x = \cos \alpha$$

$$x_{1,2} = \pm \alpha + 360k \quad ; \quad x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$$

(ג) פונקציית tan

$$1) \tan x = m$$

$$x = \arctan m + 180k \quad ; \quad x = \arctan m + \pi k$$

$$2) \tan x = \tan \alpha$$

$$x = \alpha + 180k \quad ; \quad x = \alpha + \pi k$$

(ד) פונקציית cot

$$1) \cot x = m$$

$$x = \operatorname{arccot} m + 180k \quad ; \quad x = \operatorname{arccot} m + \pi k$$

$$2) \cot x = \cot \alpha$$

$$x = \alpha + 180k \quad ; \quad x = \alpha + \pi k$$

(4) הנדסת המישור עם יישומים טריגונומטריים

(א) בכל משולש ישר זווית בו a ו- b ניצבים ו- c היתר. הזוויות החדות הן β ו- α מתקיים:

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha \Rightarrow a = b \cdot \tan \alpha \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{a}{b} = \cot \beta \Rightarrow a = b \cdot \cot \beta \quad \frac{a}{c} = \cos \beta \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta$$

$$\frac{b}{a} = \tan \beta \Rightarrow b = a \cdot \tan \beta \quad \frac{b}{c} = \sin \beta \Rightarrow b = c \cdot \sin \beta$$

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha \Rightarrow b = a \cdot \cot \alpha \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha$$

(ב) משפטים הקשורים בגיאומטריה עם שימושים טריגונומטריים :

(1) שטח משולש ניתן לחשב עפ"י חצי מכפלת צלעות וסינוס הזווית שביניהן :

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \angle A}{2}$$

(2) שטח מרובע ניתן לחשב עפ"י מחצית מכפלת האלכסונים וסינוס הזווית שביניהם :

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

(3) משפט הסינוסים :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$a = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$b = 2R \cdot \sin \beta$$

$$c = 2R \cdot \sin \gamma$$

(4) משפט הקוסינוסים : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$

$$\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{משפט הטנגנסים} \quad (5)$$

$$\frac{\cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b} \quad \text{משפט הקוטנגנסים} \quad (6)$$

(7) בכל משולש שהוא אינו ישר זווית מתקיים :

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma$$

(8) היחס בין רדיוס המעגל החסום לבין רדיוס המעגל החוסם בכל משולש הוא :

$$\frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\angle B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\angle C}{2}\right)$$

(ג) קשר בין זוויות במשולש ABC :

$\sin(A + B) = \sin C$	$\cos(A + B) = -\cos C$	$\tan(A + B) = -\tan C$	$\cot(A + B) = -\cot C$
$\sin(A + C) = \sin B$	$\cos(A + C) = -\cos B$	$\tan(A + C) = -\tan B$	$\cot(A + C) = -\cot B$
$\sin(B + C) = \sin A$	$\cos(B + C) = -\cos A$	$\tan(B + C) = -\tan A$	$\cot(B + C) = -\cot A$
$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$	$\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$	$\tan \frac{A+B}{2} = \tan \frac{C}{2}$	$\cot \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2}$

(5) פונקציות של סכום והפרש זוויות

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\tan x \cdot \tan y \mp 1}{\tan x \pm \tan y}$$

(6) נוסחאות של זוויות כפולות

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

(7) פירוק לגורמים

$$\sin x \pm \sin y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$

$$\cos x \pm \cos y = \pm 2\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\pm \sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}$$

(8) מעבר מכפל לסכום של פונקציות טריגונומטריות

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

(9) נוסחאות ל"חצי" זווית

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

(10) נוסחאות טריגונומטריות נוספות

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y) \cdot \sin(x+y)$$

$$\cos^2 x - \cos^2 y = -\sin(x-y) \cdot \sin(x+y)$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot x \equiv \frac{1}{\tan x}$$

$$\cot x \cdot \tan x = 1$$

$$\sec x \equiv \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x \equiv \frac{1}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sin\left(\frac{\sphericalangle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$$

$$\cos\left(\frac{\sphericalangle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

הקשר בין זוויות המשולש לנוסחת הירון:

(11) קשרים מתקדמים ופתרון משוואות טריגונומטריות

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\mp \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\mp \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$$

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

דרך לפתרון משוואת טריגונומטריות מהצורה: $a \sin x + b \cos x = c$

$$a \sin x + b \cos x = c \Rightarrow 2a \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + b(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = c(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow (b+c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} + c - b = 0 \Rightarrow (b+c) \cdot t^2 - 2t + c - b = 0$$

דרך לפתרון משוואת טריגונומטריות מהצורה: $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi)$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(12) נוסחאות לחישוב הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x & \cos(\arccos x) &= x \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} & \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \tan(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \tan(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \cot(\arcsin x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \cot(\arccos x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x) &= x & \cot(\operatorname{arccot} x) &= x \\ \cot(\arctan x) &= \frac{1}{x} & \tan(\operatorname{arccot} x) &= \frac{1}{x} \\ \sin(\arctan x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \sin(\operatorname{arccot} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \cos(\operatorname{arccot} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

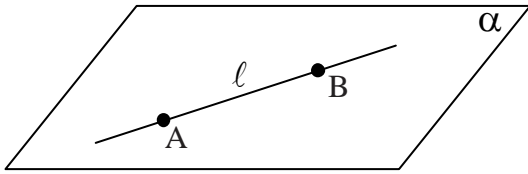
(13) הפונקציות ההיפרבוליות

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh^2(x) + \sinh^2(x) &= \cosh(2x) \\ \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 2 \cdot \cosh(x) \cdot \sinh(x) &= \sinh(2x) \\ \coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} & (\sinh(x))' &= \cosh x \\ & & (\cosh(x))' &= \sinh x\end{aligned}$$

נושא מס' 5: הנדסת המרחב

(1) אכסיומות

(א) אם שתי נקודות של ישר שייכות למישור אז כל הישר מוכל ע"י מישור זה.

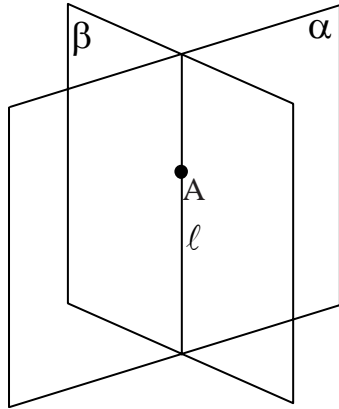


$$\begin{aligned} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{aligned} \Rightarrow l \in \alpha$$

(ב) דרך שלוש נקודות אינן שייכות לאותו הישר עובר מישור אחד ויחיד.



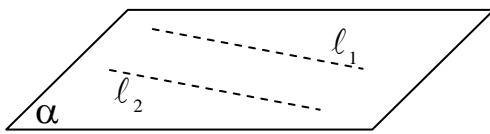
(ג) אם לשני מישורים ישנה נקודת משותפת אחת אז למישורים אלו ישנו ישר משותף המכיל את הנקודה.



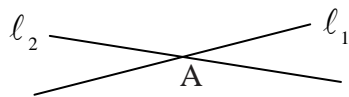
$$\begin{aligned} & \text{אם } \begin{cases} A \in \alpha \\ A \in \beta \end{cases} \text{ אז קיים } l \\ & \text{כך ש- } A \in l \text{ וגם } \begin{cases} l \in \alpha \\ l \in \beta \end{cases} \end{aligned}$$

(2) הגדרות

(א) ישרים שיש להם אינסוף נקודות משותפות נקראים ישרים מתלכדים.

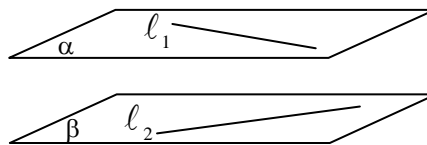


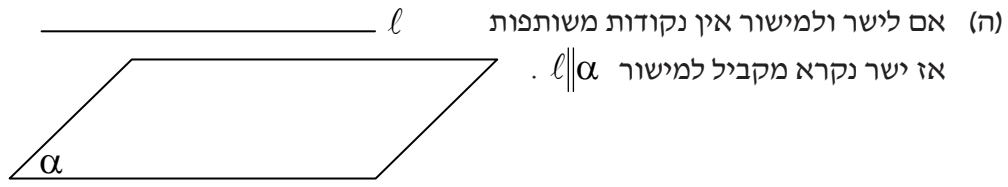
(ב) ישרים הנמצאים במישור אחד ולא נחתכים נקראים ישרים מקבילים $l_1 \parallel l_2$.



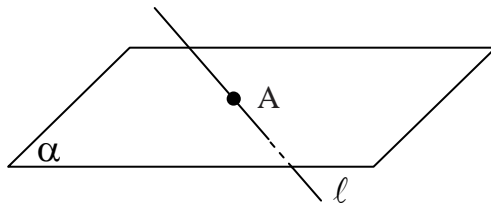
(ג) ישרים שיש להם נקודת משותפת אחת נקראים ישרים נחתכים $A \in l_1$ ו- $A \in l_2$.

(ד) ישרים שאינם מקבילים ואינם נחתכים נקראים מצטלבים. לא קיים מישור המכיל שני ישרים מצטלבים, אבל קיימים שני מישורים שונים ומקבילים שלהם שייכים הישרים הללו.

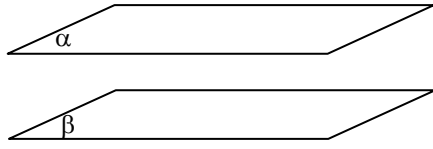




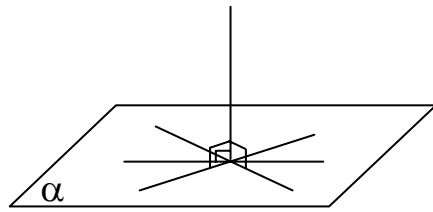
(ה) אם לישר ולמישור אין נקודות משותפות אז ישר נקרא מקביל למישור $l \parallel \alpha$.



(ו) אם לישר ולמישור ישנה נקודה משותפת אחת אז ישר חותך את המישור.

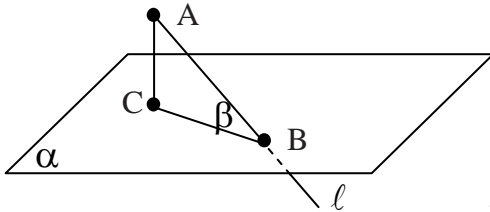


(ז) שני מישורים שאין להם אף נקודה משותפת נקראים מישורים מקבילים $\alpha \parallel \beta$.

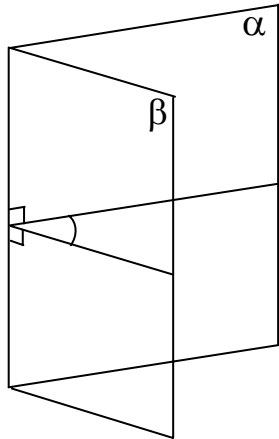


(ח) ישר המאונך לכל ישר הנמצא במישור נקרא אנך למישור

$$l \perp \alpha \Rightarrow l \perp l_1, l \perp l_2, l \perp l_3, \dots$$



(ט) זווית בין ישר לבין מישור היא זווית בין ישר זה לבין היטלו של הישר על המישור. נתון כי ישר l ומישור α נחתכים בנקודה B. אם ניקח על הישר נקודה A כלשהי אז קטע AB נקרא משופע למישור. אנך למישור מנקודה A חותך את המישור בנקודה C. קטע CB נקרא היטל של משופע AB על המישור α . זווית β נקראת זווית בין ישר l לבין מישור α .

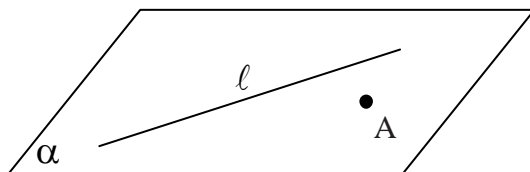


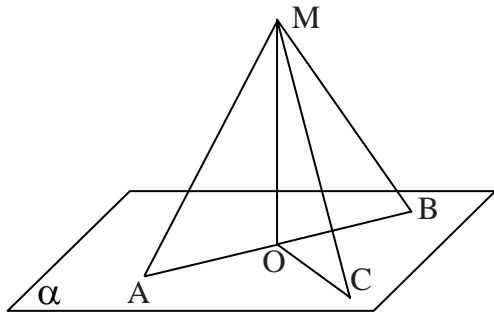
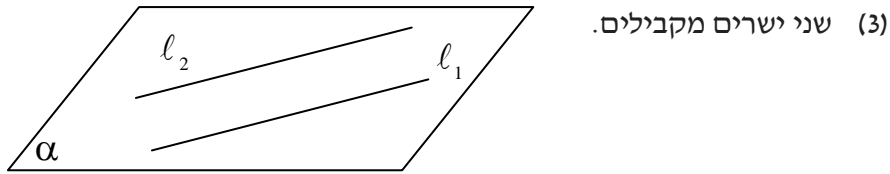
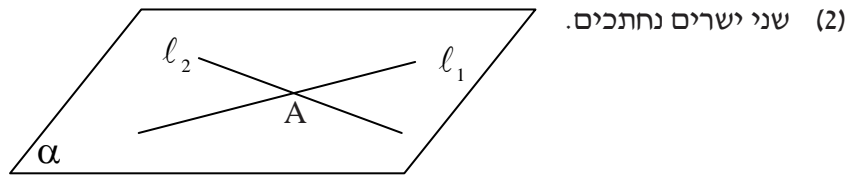
(י) זווית בין שני מישורים הנחתכים נקראת זווית פינתית. המישורים היוצרים את הזווית נקראים פאות. הישר המשותף נקרא מקצוע. זווית פינתית היא זווית בין אנכים למקצוע השייכים לפאותיה של זווית. ישרים נקראים גם מאונכים אם הזווית הפינתית היא ישרה.

(3) משפטים בסיסיים

(א) משורר נקבע ע"י:

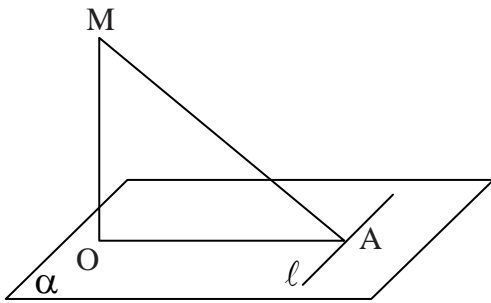
(1) ישר ונקודה מחוץ לישר זה.



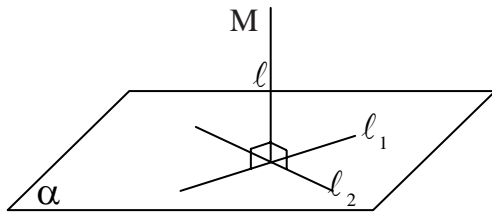


(ב) דרך נקודה הנמצאת מחוץ למישור עובר אנך יחיד ואין סוף משופעים. בסרטוט: MO – אנך, AM, BM, CM – משופעים. AO, BO, CO – היטלים של משופעים. זוויות A, B, C – זוויות בין משופעים למישור.

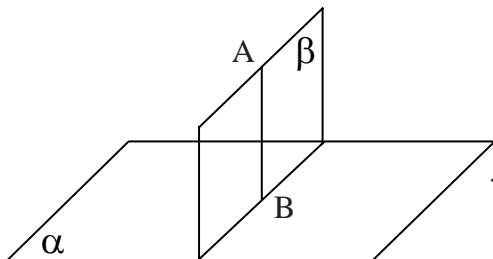
- (1) למשופעים שווים מתאימים היטלים שווים וזוויות שוות ולהיפך.
- (2) למשופע גדול מתאים היטל גדול ולהיפך.
- (3) למשופע גדול מתאימה זווית קטנה ולהיפך.



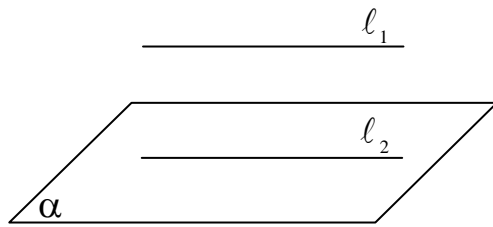
- (ג) MO אנך למישור, MA משופע, OA היטל, l ישר הנמצא במישור.
- (1) אם ישר הנמצא במישור מאונך להיטל של משופע אז הוא מאונך גם למשופע בעצמו. אם $l \perp OA$ אז $l \perp AM$.
 - (2) אם ישר הנמצא במישור מאונך למשופע אז הוא מאונך גם להיטלו של משופע זה. אם $l \perp AM$ אז $l \perp OA$.



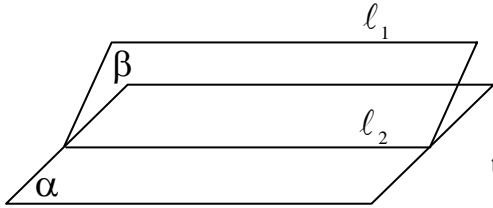
- (ד) אם ישר מאונך לשני ישרים נחתכים הנמצאים במישור אז הוא מאונך למישור כולו.
- אם $\left\{ \begin{matrix} l_1 \in \alpha \\ l_2 \in \alpha \\ l_1 \nparallel l_2 \end{matrix} \right\}$ וגם $\left\{ \begin{matrix} l \perp l_1 \\ l \perp l_2 \end{matrix} \right\}$ אז $l \perp \alpha$.



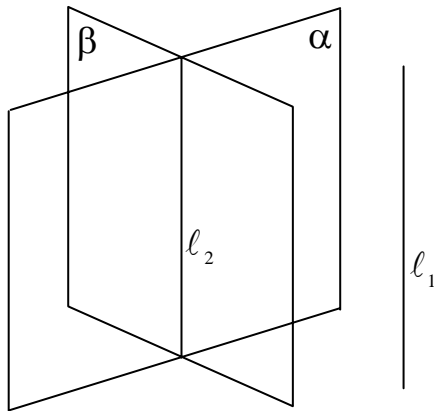
- (ה) AB אנך למישור α ומוכל במישור β . מישור המכיל את האנך למישור השני מאונך למישור זה. אם $\alpha \perp \beta$ וגם $AB \in \beta$ אז $AB \perp \alpha$.



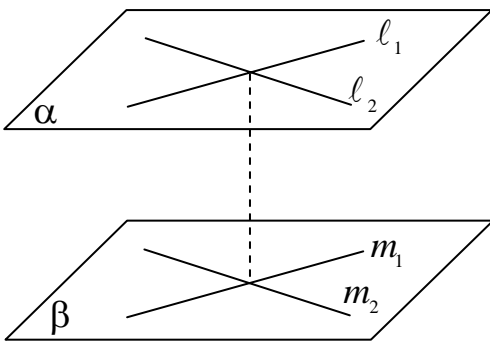
(ו) אם ישר הנמצא מחוץ למישור מקביל לישר אחר הנמצא במישור אז הישר הנמצא מחוץ למישור מקביל לכל המישור. אם $l_2 \in \alpha$ וגם $l_2 \parallel l_1$ אז $l_1 \parallel \alpha$.



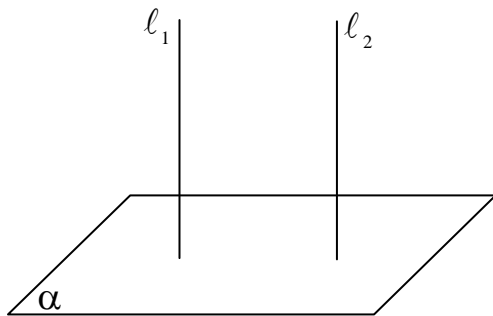
(ז) אם מישור β מכיל את הישר l_1 המקביל למישור α אז ישר משותף של שני המישורים l_2 מקביל לישר l_1 . אם $l_1 \parallel \alpha$, $l_1 \in \beta$ וגם שני המישורים נחתכים אז $l_1 \parallel l_2$ (שים לב - $l_2 \in \alpha, \beta$).



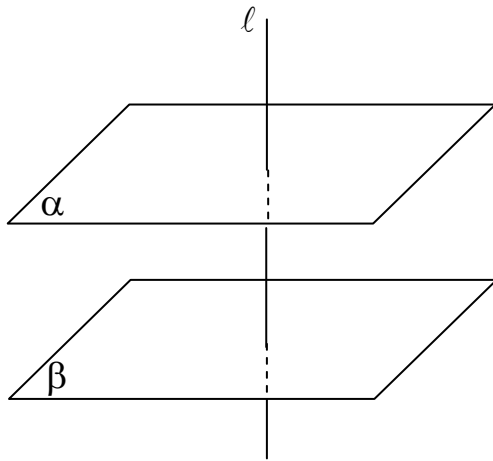
(ח) אם ישר מקביל לכל אחד משני מישורים נחתכים אז ישר זה מקביל לישר משותף של מישורים אלו. אם α ו- β נחתכים ו- l_2 הוא ישר משותף וגם $l_1 \parallel \alpha$ ו- $l_2 \perp \beta$ אז $l_1 \parallel l_2$.



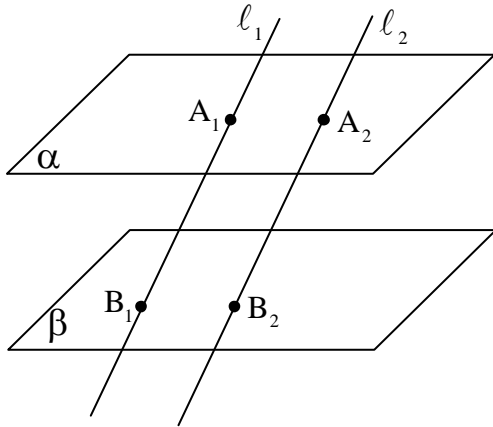
(ט) אם שני הישרים הנחתכים השייכים למישור אחד מקבילים בהתאמה לשני הישרים הנחתכים השייכים למישור השני אז מישורים אלו הם מקבילים. אם $\left\{ \begin{matrix} l_1 \parallel m_1 \\ l_2 \parallel m_2 \end{matrix} \right\}$ וגם $\left\{ \begin{matrix} m_1 \in \beta \\ m_2 \in \beta \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} l_1 \in \alpha \\ l_2 \in \alpha \end{matrix} \right\}$ אז $\alpha \parallel \beta$.



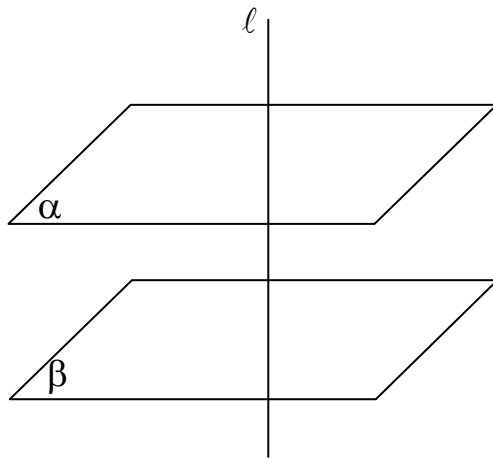
(י) (1) שני אנכים לאותו המישור מקבילים זה לזה. אם $l_1 \perp \alpha$ וגם $l_2 \perp \alpha$ אז $l_1 \parallel l_2$. (2) אם אחד מהישרים המקבילים מאונך למישור אז הישר השני גם מאונך למישור זה. אם $l_1 \parallel l_2$ וגם $l_1 \perp \alpha$ אז $l_2 \perp \alpha$.



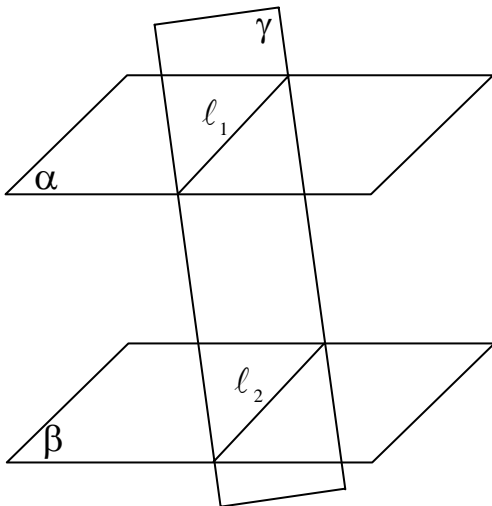
(יא) אם ישר מאונך לאחד מהמישורים המקבילים
 אז הוא מאונך גם למישור השני.
 אם $\alpha \parallel \beta$ וגם $l \perp \alpha$ אז $l \perp \beta$.



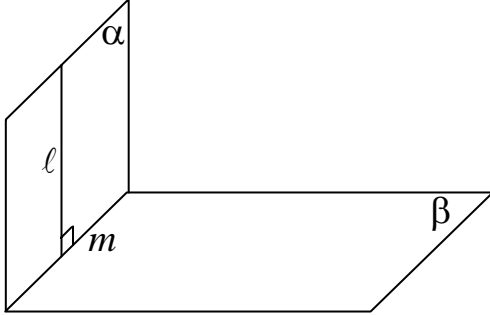
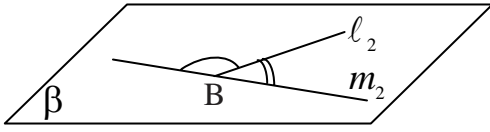
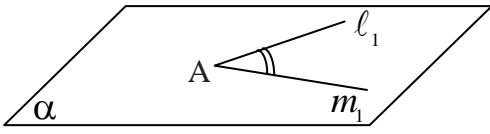
(יב) קטעים מקבילים הנמצאים בין מישורים
 מקבילים שווים זה לזה.
 אם $\alpha \parallel \beta$ וגם $l_1 \parallel l_2$ אז $A_1B_1 = A_2B_2$.



(יג) שני מישורים המאונכים לאותו ישר
 מקבילים.
 אם $l \perp \beta$ וגם $l \perp \alpha$ אז $\alpha \parallel \beta$.



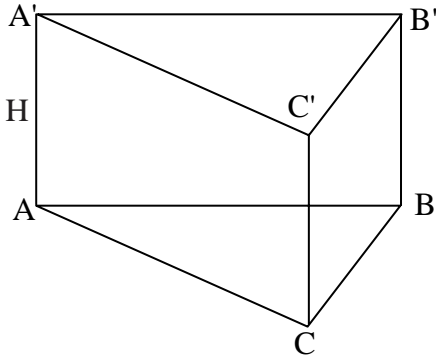
(יד) אם שני מישורים מקבילים נחתכים
 ע"י המישור השלישי אז ישרי החיתוך
 של המישורים הם מקבילים.
 אם $\alpha \parallel \beta$, ישר משותף של α
 ושל γ , ישר משותף של β ושל γ
 אז $l_1 \parallel l_2$.



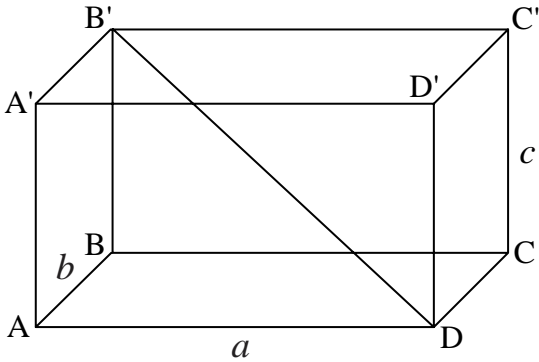
(טו) אם שתי זוויות נמצאות במישור אחד
או במישורים מקבילים ושוקיים של זוויות
מקבילות בהתאמה אז זוויות אלו שוות זו
לזו או הן משלימות ל-180 מעלות.
אם $l_1 \parallel l_2$ וגם $m_1 \parallel m_2$ אז
 $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ או $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$.

(טז) אם שני מישורים מאונכים אז הישר המאונך
למקצוע הנמצא באחד המישורים מאונך
למישור השני.
אם $\alpha \perp \beta$, הוא ישר משותף (מקצוע),
גם $l \perp \beta$ אז $l \perp m$ וגם $l \in \alpha$.

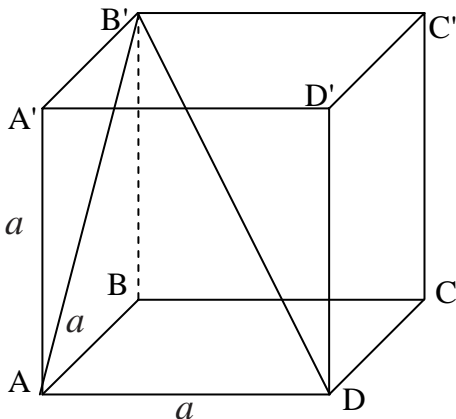
(4) נוסחאות חישוב



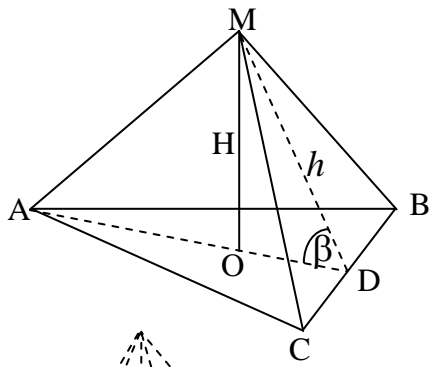
(א) שטח פנים של מנסרה / תיבה ניתן לחישוב לפי נוסחה:
 $S = P \cdot H$ (H גובה, P היקף הבסיס).
שטח הפנים של מנסרה / תיבה מוגדר כסכום של שטח
המעטפת ושל פעמיים שטח הבסיס: $S = S_m + 2S_b$.
נפח מנסה / תיבה מוגדר כמכפלת הגובה בשטח הבסיס:
 $V = H \cdot S_b$.



(ב) אלכסון של תיבה ניתן לחישוב לפי נוסחה:
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
נפח תיבה: $V = a \cdot b \cdot c$
שטח מעטפת: $M = 2(ac + bc)$
שטח פנים: $P = 2(ac + bc + ab)$



(ג) נוסחאות לחישוב בקוביה:
אלכסון פיאה: $d = a\sqrt{2}$
אלכסון קוביה: $d = a\sqrt{3}$
שטח פנים של קוביה: $S = 6a^2$
נפח קוביה: $V = a^3$



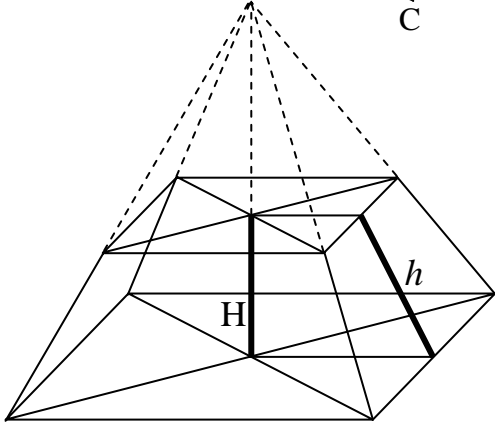
(ד) פירמידה משוכללת וישרה :

$$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot h$$

(P הקיף הבסיס, גובה בפיאה צדדית).

$$\frac{S_b}{S_m} = \cos \beta$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot H$$



(ה) פירמידה קטומה משוכללת וישרה :

$$S = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot h$$

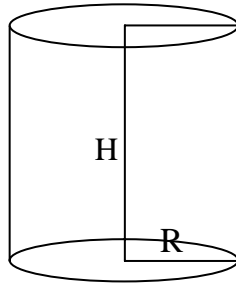
P_2, P_1 היקפים של הבסיסים

h גובה של הפיאה הצדדית.

$$V = \frac{1}{3} \cdot H (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$$

S_2, S_1 שטחים של הבסיסים

H גובה של פירמידה.

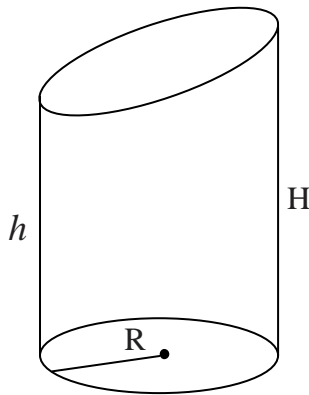


(ו) גליל :

$$S = 2\pi R \cdot H$$

$$S = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2$$

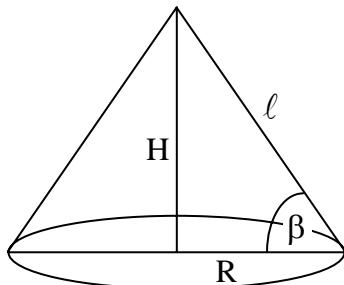
$$V = \pi R^2 \cdot H$$



(ז) גליל קטום : (R הוא רדיוס הבסיס וגבהיו הם h ו- H)

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot (h + H)$$

$$M = \pi R \cdot (h + H)$$



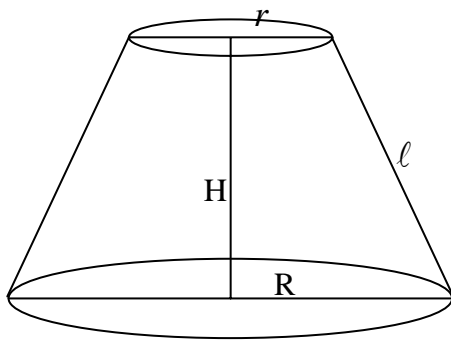
(ח) חרוט :

$$S = \pi R \cdot l$$

$$S = \pi R \cdot l + \pi R^2$$

$$\frac{S_b}{S_m} = \cos \beta$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$$



(ט) חרוט קטום :

שטח מעטפת: $P = \pi l \cdot (R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

שטח פנים: $M = \pi l \cdot (R + r)$

נפח חרוט: $V = \frac{1}{3} \pi H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$

(יא) כיפה כדורית:

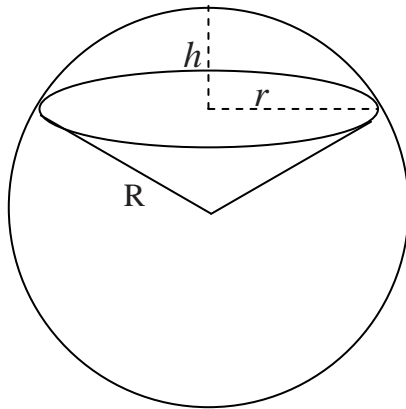
בציור: R רדיוס הכדור, r רדיוס

בסיס הכיפה ו-h גובה הכיפה.

נפח: $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$

שטח מעטפת: $M = 2\pi R h = \pi(r^2 + h^2)$

שטח פנים: $P = \pi(2Rh + r^2) = \pi(2r^2 + h^2)$



(יג) שכבה כדורית:

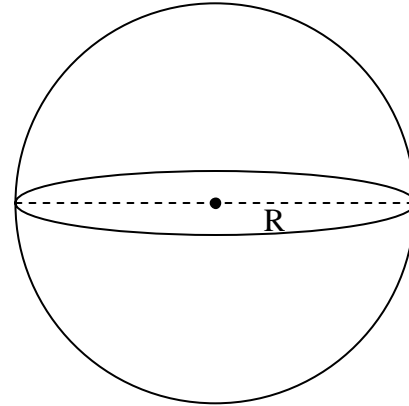
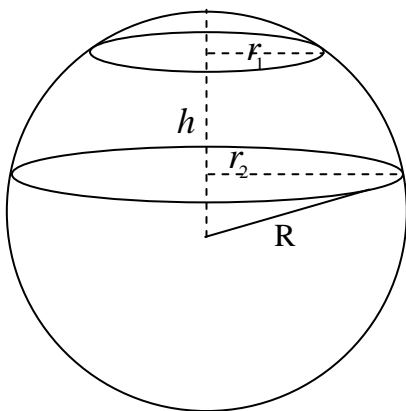
R – רדיוס הכדור, h גובה השכבה

r_1 ו- r_2 רדיוסי הבסיס.

נפח: $V = \frac{1}{2} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3} h^2)$

שטח מעטפת: $M = 2\pi R h$

שטח פנים: $P = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2)$



(י) כדור:

שטח הפנים של כדור: $S = 4\pi R^2$

נפח כדור: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

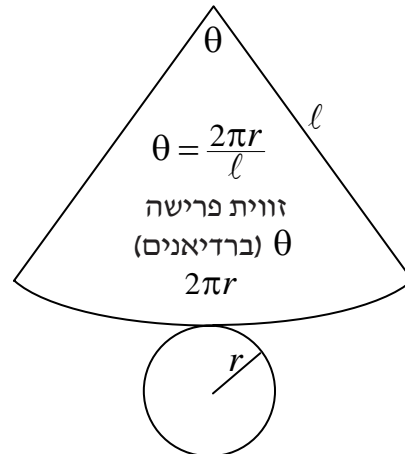
(יב) גיזרה כדורית:

R רדיוס הכדור, r רדיוס

הגזרה ו-h גובה הכיפה.

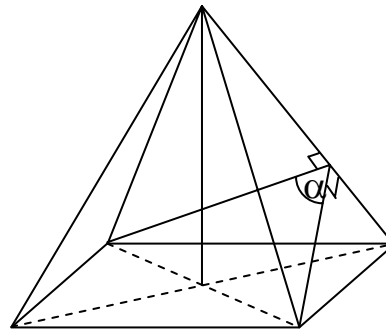
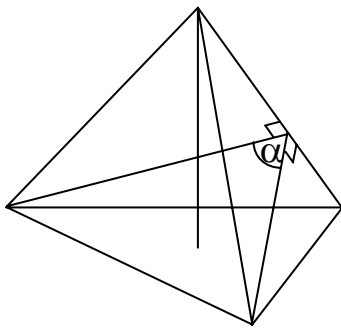
נפח: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

שטח פנים: $P = \pi R (r + 2h)$

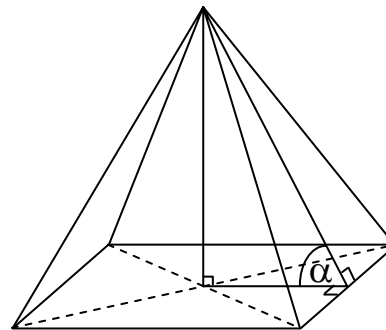
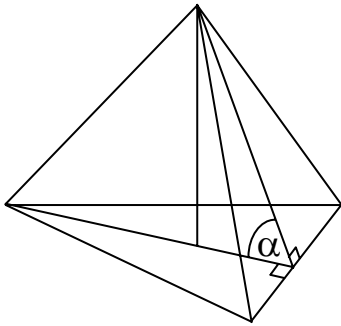


(5) מציאת זוויות בצורות מרחביות

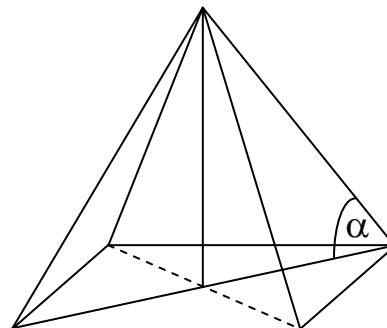
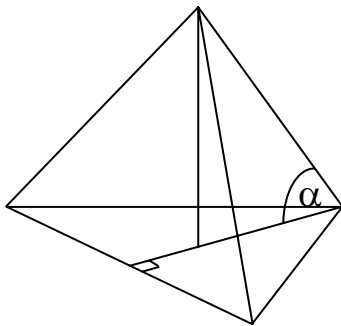
(א) זווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות :



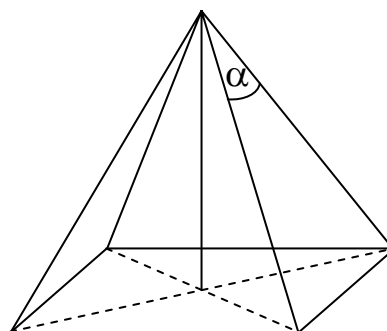
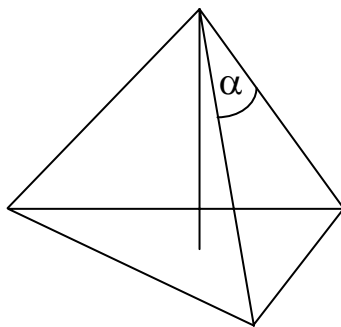
(ב) זווית בין פאה צדדית לבסיס :



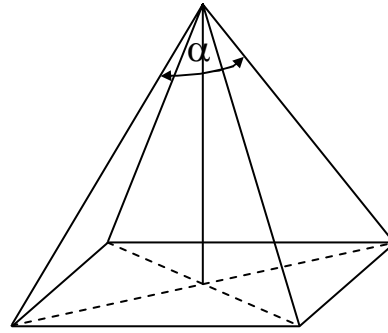
(ג) זווית בין מקצוע צדדי לבסיס



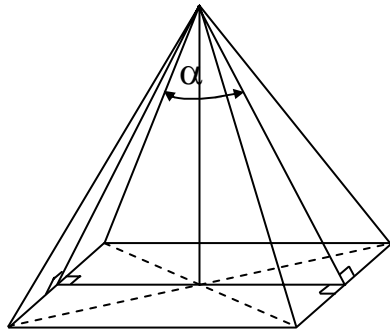
(ד) זווית בין מקצועות צדדיים סמוכים



(ה) זווית בין מקצועות נגדיים



(ו) זווית בין פיאות נגדיות



(6) הגדרות ומשפטים נוספים

- (א) פירמידה נקראת **פירמידה משוכללת** אם הבסיס שלה הוא מצולע משוכלל.
- (ב) פירמידה נקראת **פירמידה ישרה** אם הגובה של הפירמידה (אנך מהקודקוד לבסיס) עובר דרך מרכז המעגל החוסם את הבסיס.
- (ג) בפירמידה ישרה:
- (1) כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה.
 - (2) כל המקצועות הצדדיים יוצרים עם הבסיס את אותה הזווית.
- (ד) בפירמידה משולשת משוכללת וישרה קיים: $\tan \beta = 2 \tan \alpha$
- בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה קיים: $\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha$
- α היא זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
- β היא זווית בין פיאה צדדית לבסיס.
- (ה) אם כל הפיאות הצדדיות של פירמידה יוצרות עם בסיס את אותה הזווית אז גובה של פירמידה עובר דרך מרכז המעגל החוסם בתוך הבסיס.
- (ו) אם מקצוע צדדי מאונך לבסיס של המנסרה אז הוא **גובה של המנסרה** והמנסרה נקראת **מנסרה ישרה**.
- (ז) מנסרה שבסיסה הוא מצולע משוכלל נקראת **מנסרה משוכללת**.
- (ח) אלכסוני התיבה שווים זה לזה וחוצים זה את זה.
- (ט) אם מישור עובר דרך המרכזים של בסיסי **הגליל** אז הוא מחלק את הגליל לשני חלקים זהים. החתך המתקבל נקרא חתך צירי. הוא מאונך לבסיסים ויש לו צורה של מלבן שצלעותיו הן $2R$ ו- H . כל חתך אחר מקביל לו נקרא חתך משנה.
- (י) כל חתך של **כדור** הוא מעגל. החתך הגדול ביותר עובר דרך מרכז הכדור. רדיוסו של חתך זה שווה לרדיוס הכדור.

נושא מס' 6: סדרות

(1) סדרה חשבונית

- (א) הפרש של סדרה חשבונית: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow d = \frac{a_i - a_j}{i - j}$.
- (ב) האיבר הכללי של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; חיובי – סדרה עולה; d שלילי – סדרה יורדת.
- (ג) סכום של סדרה חשבונית: $S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + [n-1] \cdot d)$; $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

(2) סדרה הנדסית

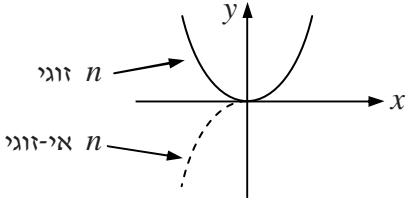
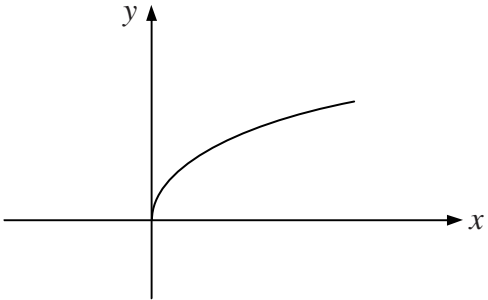
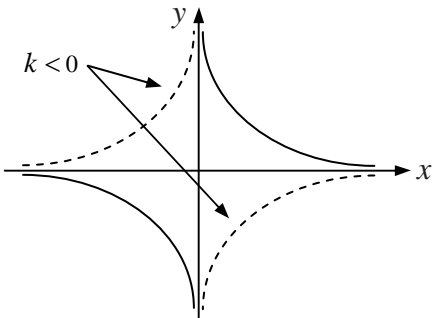
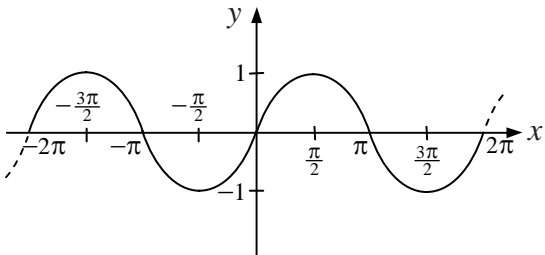
- (א) מנה של סדרה הנדסית: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow q = \sqrt[i-j]{\frac{a_i}{a_j}}$.
- (ב) האיבר הכללי של סדרה הנדסית: $(a_n)^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
- (ג) סכום של סדרה הנדסית: $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ (עבור סדרה יורדת); בצורה אחרת: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ (עבור סדרה עולה).
- (ד) סכום של סדרה הנדסית יורדת אינסופית: $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

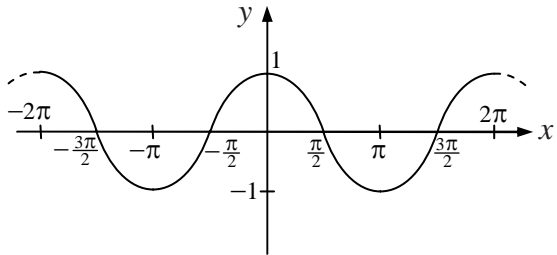
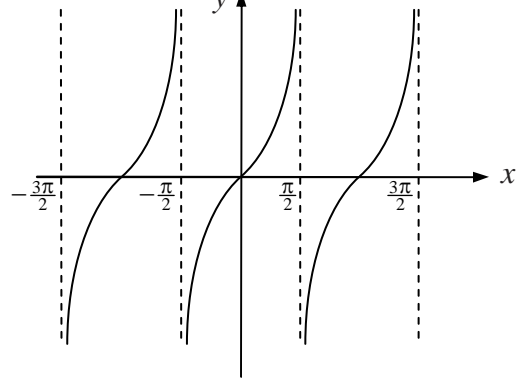
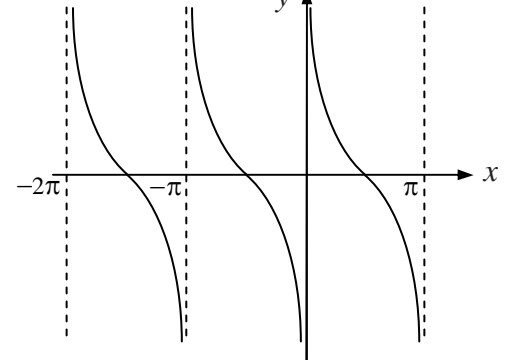
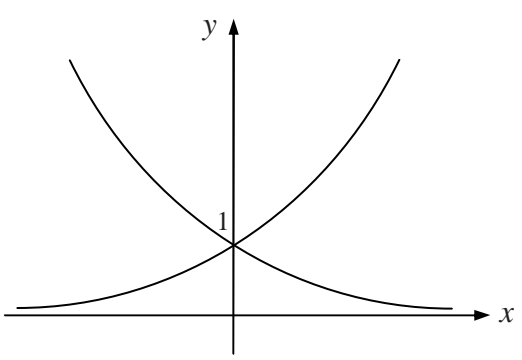
(3) סדרות שונות

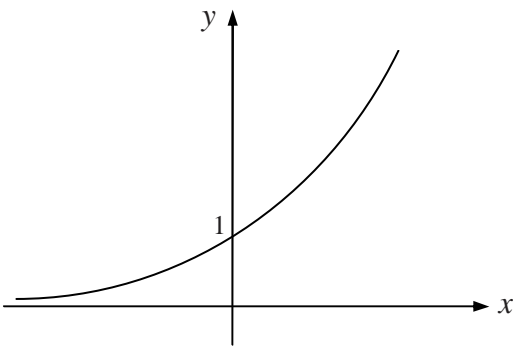
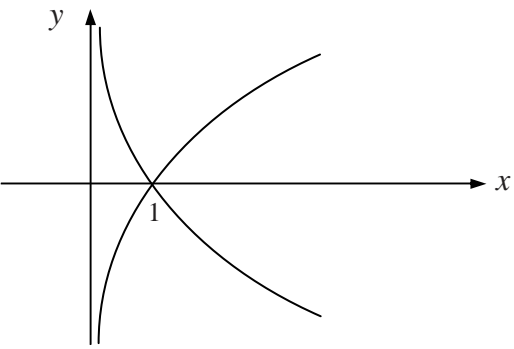
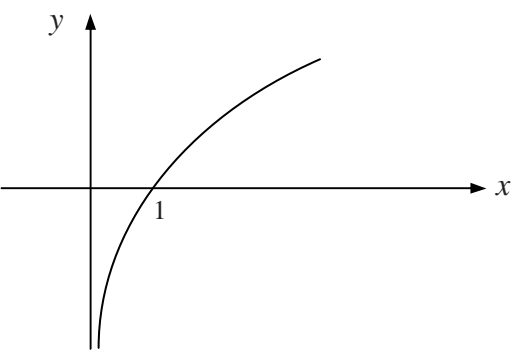
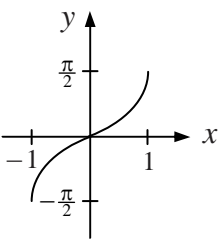
- (א) אם נתונה סדרת מספרים חשבונית בה האיבר האחרון איננו האיבר הכללי של הסדרה משתמשים בנוסחה: $k - 1 = \frac{a_n - a_1}{d}$. מוצאים את k והוא למעשה משמש כמספר האיברים בסדרה. שימוש חשוב לנוסחה זו מצוי בהוכחות באינדוקציה.
- (ב) אם נתונה סדרת מספרים הנדסית בה האיבר האחרון איננו האיבר הכללי של הסדרה משתמשים בנוסחה: $a_n = a_1 \cdot q^{k-1}$. מוצאים את k והוא למעשה משמש כמספר האיברים בסדרה.
- (ג) טור טלסקופי מוגדר באופן הבא: $\frac{k}{a \cdot b} + \frac{k}{b \cdot c} + \frac{k}{c \cdot d} + \frac{k}{d \cdot e} + \dots + a_n = S_n$. פיתוח הנוסחה של סכום הטור מבוסס על החוק: $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$. על כן סכום של טור טלסקופי (לפי הדוגמה שהוצגה): $S_n = \frac{k}{b-a} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{e} \right]$.
- (ד) האיבר הכללי של "סדרת הפרשים": $a_n = a_1 + S_{n-1}^*$. S_{n-1}^* הוא סכום $n-1$ האיברים הראשונים בסדרת הפרשים.
- (ה) האיבר הכללי מוגדר לפי נוסחה: $a_n = S_n - S_{n-1}$.
- (ו) מציאת כלל נסיגה משמעותה הגדרת האיבר הראשון של הסדרה ומציאת קשר בין a_{n+1} לבין a_n . אם נתון כלל נסיגה אזי מציאת האיבר הכללי של הסדרה a_n נעשה ע"י חיבור בין a_1 לבין סכום של $n-1$ הפרשים: $a_{n+1} - a_n$ (ראה סדרת הפרשים).

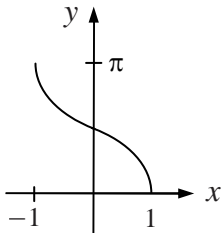
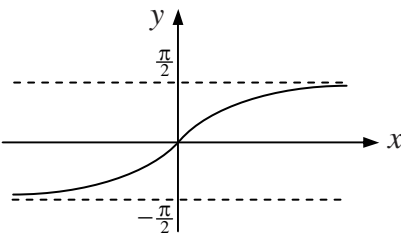
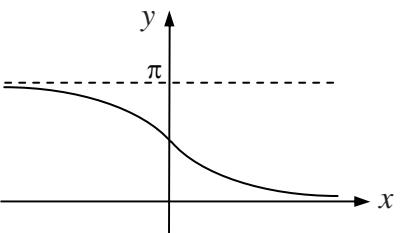
נושא מס' 7: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

(1) רשימת הפונקציות

הגרף של הפונקציה	הפונקציה ותכונותיה
 <p>זוגי n אי-זוגי n</p>	$y = x^n$ $y' = nx^{n-1}$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + D$ <p>לכל n זוגי הפונקציה זוגית ולהיפך.</p>
	$y = C$ $y' = 0$ $\int C dx = Cx + C$
	$y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$ <p>תחום ההגדרה: R_+ טווח: R_+</p> $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{3/2}$
 <p>$k < 0$</p>	$y = \frac{k}{x}$ $y' = \frac{-k}{x^2}$ $\int \frac{k}{x} dx = k \ln x + C$ <p>תחום ההגדרה: $x \neq 0$ טווח: $y \neq 0$ הפונקציה היא פונקציה אי-זוגית: $f(x) = -f(-x)$</p>
	$y = \sin x$ $y' = \cos x$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ <p>תחום ההגדרה: R טווח: $-1 \leq y \leq 1$ הפונקציה מחזורית – מחזור שלה הוא 2π. הפונקציה היא פונקציה אי-זוגית: $f(x) = -f(-x)$</p>

הגרף של הפונקציה	הפונקציה ותכונותיה
	$y = \cos x$ $y' = -\sin x$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ <p>תחום ההגדרה: \mathbb{R} טווח: $-1 \leq y \leq 1$ הפונקציה מחזורית – מחזור שלה הוא 2π. הפונקציה היא פונקציה זוגית: . $f(x) = f(-x)$</p>
	$y = \tan x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ <p>תחום ההגדרה: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ \mathbb{R} : טווח הפונקציה מחזורית – מחזור שלה הוא π. הפונקציה היא פונקציה אי-זוגית: . $f(x) = -f(-x)$</p>
	$y = \cot x$ $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$ <p>תחום ההגדרה: $x \neq \pi k$ \mathbb{R} : טווח הפונקציה מחזורית – מחזור שלה הוא π. הפונקציה היא פונקציה אי-זוגית: . $f(x) = -f(-x)$</p>
	$y = a^x$ $y' = a^x \ln a$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ <p>תחום ההגדרה: \mathbb{R} טווח: \mathbb{R}_{++} הערות: $a \neq 1, a > 0$ בשרטוט מוצגים שני גראפים. באם a גדול מ-1 אז הגרף הוא של הפונקציה העולה; באם a נמצא בין 0 ל-1 אז הגרף הוא של הפונקציה היורדת.</p>

הגרף של הפונקציה	הפונקציה ותכונותיה
	$y = e^x$ $y' = e^x$ $\int e^x dx = e^x + C$ <p style="text-align: right;">תחום ההגדרה: \mathbb{R} טווח: \mathbb{R}_{++}</p>
	$y = \log_a x$ $y' = \frac{1}{x \ln a}$ $\int \log_a x dx = x \log_a \left(\frac{x}{e} \right) + C$ <p style="text-align: right;">תחום ההגדרה: \mathbb{R}_{++} טווח: \mathbb{R} הערות: $a \neq 1, a > 0$ בשרטוט מוצגים שני גראפים. באם a גדול מ 1 אז הגרף הוא של הפונקציה העולה; באם a נמצא בין 0 ל 1 אז הגרף הוא של הפונקציה היורדת.</p>
	$y = \ln x$ $y' = \frac{1}{x}$ $\int \ln x dx = x \ln \left(\frac{x}{e} \right) + C$ <p style="text-align: right;">תחום ההגדרה: \mathbb{R}_{++} טווח: \mathbb{R}</p>
	$y = \arcsin x$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ <p style="text-align: right;">תחום ההגדרה: $-1 \leq x \leq 1$ טווח: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$</p>

הגרף של הפונקציה	הפונקציה ותכונותיה
	$y = \arccos x$ $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ תחום ההגדרה: $-1 \leq x \leq 1$ טווח: $0 \leq y \leq \pi$
	$y = \arctan x$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$ $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ תחום ההגדרה: \mathbb{R} טווח: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
	$y = \operatorname{arccot} x$ $y' = \frac{-1}{1+x^2}$ $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ תחום ההגדרה: \mathbb{R} טווח: $0 < y < \pi$

(2) כללים נוספים

(א) נגזרת של מכפלת פונקציות: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

(ב) נגזרת של מנת פונקציות: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

(ג) באם נדרשים למצוא פונקציה הפוכה יש להחליף כל x ב- y ולהיפך ולאחר-מכן למצוא ביטוי חדש ל- y .

(ד) מציאת נגזרת פנימית מבוססת על גזירה של הפונקציה החיצונית והכפלתה בנגזרת של הפונקציה הפנימית: $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$. (זהו כלל השרשרת).

(ה) מציאת נגזרת לפונקציה: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(ו) כלל לופיטל: אם $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ אז מוצאים $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(ז) גבולות ידועים: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(ח) מציאת אסימפטוטה משופעת: אסימפטוטה משופעת קיימת בפונקציה שמורכבת ממנה של פונקציות ובה גובה החזקה הגבוהה במונה גבוה ב-1 מגובה החזקה הגבוהה במכנה.

$$(1) \text{ שיפוע האסימפטוטה: } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$(2) \text{ האיבר החופשי: } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

(ט) אינטגרלים נוספים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \quad (2) \quad \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + C \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad (5) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad (4)$$

$$(י) \text{ נפח גוף סיבוב: } \pi \int [f(x)]^2$$

(יא) אם קיימת פונקציה סתומה, הנגזרת שלה מסומנת כ y' ולאחר הגזירה יש למצוא ביטוי ל y' .

(יב) אם קיימות נקודות אי-הגדרה, בהן פונקציה אינה קיימת, צריך לבדוק אם מדובר בנקודה ריקה (שנוצרת מצמצום) או באסימפטוטה אנכית.

(יג) משוואת משיק לעקום $y = f(x)$ בנקודה (x_0, y_0) שעליו:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

נושא מס' 8: פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות,

מערכת E ומערכת L

(1) חזקות ושורשים

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^0 = 1$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$a^m \cdot a^{-m} = a^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(2) עקרונות בפתרון תרגילים ואי-שוויונים

(א) אם $a^x = a^y$ אזי $x = y$

(ב) אם $a^x > a^y$ ומתקיים גם $a > 1$ אזי $x > y$

(ג) אם $a^x > a^y$ ומתקיים גם $0 < a < 1$ אזי $x < y$

(3) זהויות לוגריתמיות

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n = \log_{(\sqrt[n]{a})} \sqrt[n]{b}$$

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \quad a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n \quad a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b \quad \log_1 a = 0$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a (a^n) = n$$

(4) עקרונות בפתרון תרגילים ואי-שוויונים

(א) אם $\log_a x = \log_a y$ אזי $x = y$

(ב) אם $\log_a x > \log_a y$ ומתקיים גם $a > 1$ אזי $x > y$

(ג) אם $\log_a x > \log_a y$ ומתקיים גם $0 < a < 1$ אזי $x < y$

(5) מערכת E

(א) הפונקציות השייכות למערכת E מקיימות $E(c) \neq 0$. הפונקציות האלו הן מונוטוניות והן

למעשה קבוצת הפונקציות המעריכיות.

(ב) $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$

(ג) $E(0) = 1$

(6) מערכת L

(א) הפונקציות השייכות למערכת L הן מונוטוניות והן למעשה קבוצת הפונקציות הלוגריתמיות.

(ב) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$

(ג) $L(1) = 0$

נושא מס' 9: וקטורים

(1) הגדרות ומשפטים בסיסיים

- (א) וקטור הוא שורת מספרים מסודרת: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
- (ב) מודול של וקטור (מרחק עד לראשית): $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ($|\underline{a}|^2 = |\underline{a}|^2$).
- (ג) וקטורים בעלי רכיבים פרופורציוניים תלויים לינארית.
- (ד) אם מישור עובר דרך שלוש נקודות: $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$ אזי משוואת המישור היא: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- (ה) את משוואת המישור העובר דרך הנקודות: (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , (a_3, b_3, c_3) מוצאים ע"י פתרון הדטרמיננטה שלהלן והשוואתה לאפס:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \\ x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \end{vmatrix} = 0$$

- (ו) נתונים: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ וסקלר α
- חיבור / חיסור וקטורים: $\underline{a} \pm \underline{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$
- כפל בסקלר: $\alpha \cdot \underline{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$
- מכפלה סקלרית: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
- משפט: מכפלה סקלרית של וקטורים תלויים שווה למכפלת מודולים או מנוגדת לה.
- משפט: וקטורים מאונכים – מכפלה סקלרית ביניהם היא אפס.
- הערות:

- (*) אם רוצים למצוא ישר ניצב לישר אזי יש להכפיל את הכוונים ולהשוות לאפס.
- (*) אם רוצים למצוא ישר מקביל למישור יש להכפיל את וקטור הנורמל למישור בכיוון הישר ולהשוות לאפס.

(2) מצבים הדדיים

- (א) מצב הדדי בין מישור α וישר ℓ :
- נתון המישור: $\alpha / Ax + By + Cz + D = 0$
- והישר: $\ell / \underline{x} = (a_1, b_1, c_1) + t \cdot (a_2, b_2, c_2)$
- $$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot a_2 \\ y &= b_1 + t \cdot b_2 \\ z &= c_1 + t \cdot c_2 \end{aligned} \right\} : (x, y, z) \text{ מציבים במקום } \left. \begin{aligned} & \text{ופותרים את המשוואה שנוצרה.} \end{aligned} \right\}$$
- אם: $t = [\text{num}]$ (פתרון יחיד) – המישור והישר נחתכים בנקודה אחת. בעזרת ה- t שנמצא ניתן יהיה למצוא את נקודת החיתוך בין הישר למישור.
- אם: $t = \emptyset$ (אין פתרונות) – הישר מקביל למישור.
- אם: $t = \cup$ (אינסוף פתרונות) – הישר מוכל במישור.
- (ב) מצב הדדי בין שני ישרים:
- נתונים הישרים: $\ell_1 / \underline{x} = (a_1, a_2, a_3) + t \cdot (b_1, b_2, b_3)$
- $\ell_2 / \underline{x} = (c_1, c_2, c_3) + r \cdot (d_1, d_2, d_3)$
- ע"מ למצוא את המצב ההדדי יש לבנות מערכת של שלוש משוואות עם שני נעלמים:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + t \cdot b_1 &= c_1 + r \cdot d_1 \\ a_2 + t \cdot b_2 &= c_2 + r \cdot d_2 \\ a_3 + t \cdot b_3 &= c_3 + r \cdot d_3 \end{aligned} \right\}$$

מפתרון שתי משוואות מקבלים t ו- r . אם אלו מקיימים גם את המשוואה השלישית אזי הישרים הם נחתכים או מתלכדים ואם לאו אז הם מקבילים או מצטלבים. ע"מ לקבוע מה מהאפשרויות:

- (1) אם הכוונים פרופורציונליים אזי הישרים מקבילים או מתלכדים.
 (2) אם הכוונים אינם פרופורציונליים אזי הישרים נחתכים או מצטלבים.
 (ג) מצב הדדי בין שני מישורים:

$$\alpha / A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

נתונים שני מישורים:

$$\beta / A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

אם מתקיים: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ אזי המישורים מתלכדים.

אם מתקיים: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ אזי המישורים מקבילים.

אחרת: המישורים נחתכים בישר חיתוך.

(3) זוויות בין צורות במרחב

(א) זווית בין שני וקטורים (או שני ישרים): $\cos \varphi = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{b}|}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ כאשר \underline{a} ו- \underline{b} הם הכוונים של הישרים או הוקטורים בעצמם.

(ב) זווית בין ישר למישור: $\sin \varphi = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{b}|}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ כאשר \underline{a} הוא כוון של ישר ו- \underline{b} נורמל של מישור.

(ג) זווית בין שני מישורים: $\cos \varphi = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{b}|}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ כאשר \underline{a} ו- \underline{b} הם הנורמלים של המישורים.

הערות:

(*) אם נתון המישור: $\alpha / Ax + By + Cz + D = 0$ אזי (A, B, C) הוא וקטור נורמל למישור.

(*) משפט: אם וקטור שונה מאפס יוצר עם צירים זוויות α, β, δ אזי מתקיים: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta = 1$

(4) מרחקים בין צורות במרחב

(א) מרחק מנקודה למישור: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

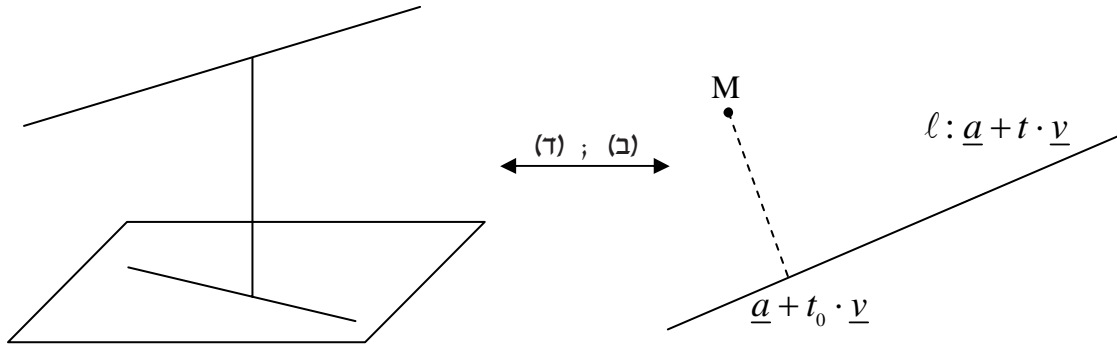
(ב) מרחק בין נקודה לישר (וגם בין שני ישרים מקבילים):

(1) יש למצוא על הישר נקודה כללית (בעזרת הפרמטר).

(2) יש לבנות כוון בין הנקודה הזו לבין הנקודה הנתונה בשאלה (או נקודה שמוצאים על הישר השני).

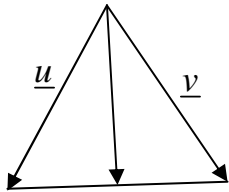
(3) את הכוון הזה יש להכפיל בכוון של אחד הישרים, להשוות לאפס ולמצוא את t .

- (4) את הפרמטר מציבים בכוון שנמצא בסעיף (ב) וע"י מודול לוקטור הכוון מתקבל המרחק.
 (ג) מרחק בין ישר למישור מקביל לו מוצאים מנקודה כלשהי על הישר למישור.
 (ד) מרחק בין שני ישרים מצטלבים:
 (1) בונים מישור המכיל את אחד הישרים ומקביל לשני.
 (2) מוצאים משוואה כללית למישור זה ואז מוצאים מרחק מנקודה כלשהי על הישר השני עד למישור שמצאנו.



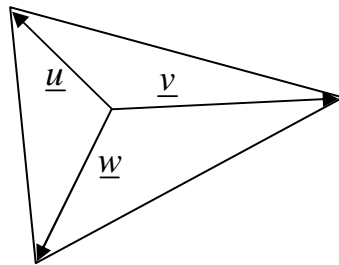
(5) חשבון חצים – משפטים

(א) תיכון הוא ממוצע חשבוני של וקטורי הצלעות היוצאות מקודקוד התיכון.



$$\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$$

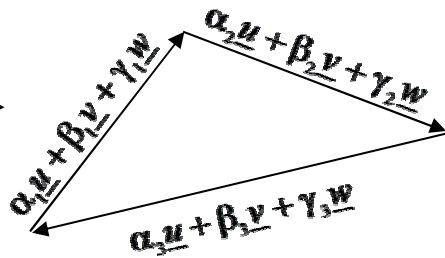
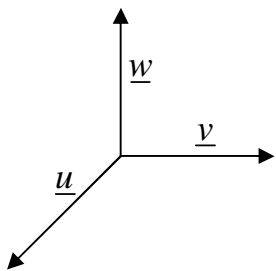
(ב) סכום וקטורים היוצאים ממרכז הכובד של המשולש שווה לאפס.



$$\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} = 0$$

(ג) סכום וקטורים היוצרים מצולע סגור שווה לאפס.

(ד) אם \underline{u} , \underline{v} , ו- \underline{w} זרים (לא באותו המישור) והצירוף הליניארי שלהם הוא אפס אז כל אחד מן המקדמים שלהם הוא אפס גם.



$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \underline{u} + \beta_1 \underline{v} + \gamma_1 \underline{w} \\ \alpha_2 \underline{u} + \beta_2 \underline{v} + \gamma_2 \underline{w} \\ \alpha_3 \underline{u} + \beta_3 \underline{v} + \gamma_3 \underline{w} \end{aligned} \right\} + = 0$$



$$\underline{u}(\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}_{=0}) + \underline{v}(\underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}_{=0}) + \underline{w}(\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}_{=0}) = 0$$

נושא מס' 10: חקירת מערכות משוואות

נתונה מערכת של שלוש משוואות ושלושה נעלמים:

- (1) אם הדטרמיננטה הראשית שווה אפס וגם כל אחת מהדטרמיננטות הצדדיות היא אפס אזי לשלושת המישורים יש ישר חיתוך משותף (למערכת יש אינסוף פתרונות).
- (2) אם הדטרמיננטה הראשית שווה אפס אולם האחרות לא שוות אפס אזי למערכת אין פתרונות.
- (3) אם הדטרמיננטה הראשית שונה מאפס אזי למערכת יהיה פתרון יחיד (נקודת מפגש אחת לשלוש המישורים).

נושא מס' 11: טכניקה אלגברית ומשוואות ריבועיות

(1) נוסחאות הכפל המקוצר ופירוק לגורמים

(א) הנוסחאות הבסיסיות:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$$

(ב) נוסחאות כלליות לכל n טבעי:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + b^{2n})$$

(2) משוואות ריבועיות ונוסחאות Vieta

(א) פתרון משוואה ריבועית:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

(ב) נוסחאות Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

הערה: בתרגילים בהם נדרשים למצוא את המשוואה הריבועית באמצעות השורשים, או בכל

מאותו הסגנון בפרק זה, יש "דרגת חופש" וניתן בדרך-כלל לבחור $a = 1$

נושא מס' 12: קומבינטוריקה, סטטיסטיקה והסתברות

(1) קומבינטוריקה

(א) מספר התמורות (בלי חזרות): $(0! = 1)$, $P_n = n!$

כאשר: $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

(ב) מספר החליפות של k מתוך n עצמים שונים (בלי חזרות): $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

(ג) מספר החליפות של k מתוך n עצמים שונים (עם חזרות): n^k

(ד) מספר הצירופים של k מתוך n עצמים שונים (בלי חזרות):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^k = C_n^{n-k})$$

(ה) הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

ומתקיים ש- $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

(2) סטטיסטיקה

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{x} - x_i) \cdot f_i}{\sum_i f_i}} \quad \text{(ב) סטיית-תקן:}$$

הערה: f_i היא השכיחות של x_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i} \quad \text{(א) ממוצע חשבוני:}$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \quad \text{(ג) ציון-תקן:}$$

(3) הסתברות

(א) ההסתברות של A או B (A, B מאורעות): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(ב) ההסתברות של A וגם B (A, B מאורעות בלתי-תלויים): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(ג) הסתברות מותנית: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B|A)$

(ד) נוסחת ברנולי: $P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

כאשר $P(k)$ – ההסתברות ל- k הצלחות ב- n ניסויים

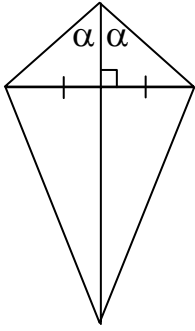
p – סיכוי להצלחה בניסוי בינומי בודד

n – מספר הניסויים

k – מספר ההצלחות

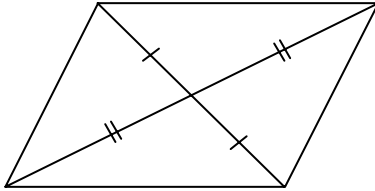
נושא מס' 13: חזרה על יסודות גיאומטריים מחטיבת הביניים

(1) דלתון



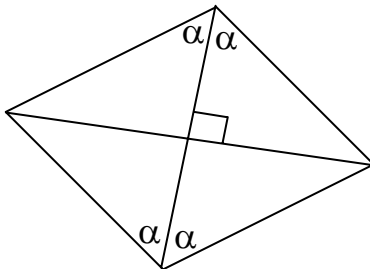
- דלתון הוא מרובע בעל שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
- (א) בדלתון האלכסונים מאונכים זה לזה.
- (ב) בדלתון האלכסון הראשי הוא חוצה זוויות ותיכון לאלכסון המשני.
- (ג) משפטים הפוכים – מרובע שבו $\langle \dots \rangle$ הוא דלתון:
- (1) האלכסונים מאונכים זה לזה.
- (2) האלכסון הוא חוצה זוויות ו/או תיכון לאלכסון השני.

(2) מקבילית



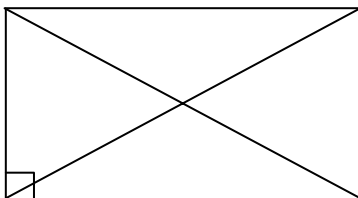
- מקבילית היא מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
- (א) כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- (ב) כל זו זוויות נגדיות שוות זו לזו.
- (ג) כל זוג זוויות סמוכות – סכומן הוא 180 מעלות.
- (ד) אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה.
- (ה) משפטים הפוכים – מרובע שבו $\langle \dots \rangle$ הוא מקבילית:
- (1) כל זוג צלעות נגדיות שוות.
- (2) כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.
- (3) כל זוג זוויות נגדיות שוות.
- (4) יש זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות.
- (ו) שטח המקבילית הוא מכפלת הצלע בגובה לצלע.

(3) מעויין



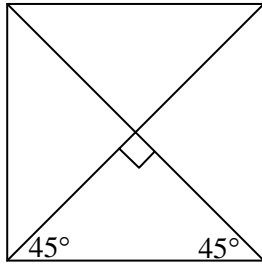
- מעויין הוא מקבילית שוות צלעות.
- (א) אלכסוני המעויין מאונכים זה לזה.
- (ב) אלכסוני המעויין הם חוצי זוויות.
- (ג) משפטים הפוכים – מקבילית שבה $\langle \dots \rangle$ היא מעויין:
- (1) אלכסוניה מאונכים זה לזה.
- (2) אלכסוניה הם חוצי זוויות.
- (ד) שטח המעויין הוא מחצית מכפלת אורכי האלכסונים.

(4) מלבן



- מלבן הוא מקבילית ישרת זווית.
- (א) אלכסוני המלבן שווים זה לזה.
- (ב) משפטים הפוכים – מקבילית שבה $\langle \dots \rangle$ היא מלבן:
- (1) אלכסוניה שווים זה לזה.
- (2) יש לפחות זווית ישרה אחת.

(5) ריבוע



ריבוע הוא מעויין בעל זווית ישרה א מלבן בעל זוג צלעות סמוכות שוות.

(א) אלכסוני הריבוע שווים זה לזה.

(ב) אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה.

(ג) אלכסוני הריבוע הם חוצי זוויות.

(ד) משפטים הפוכים –

(1) מלבן בו האלכסונים חוצים זא"ז / מאונכים זה לזה הוא ריבוע.

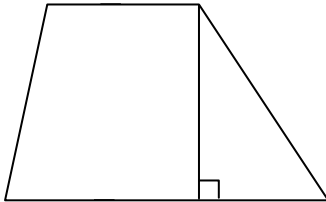
(2) מעויין בו לפחות אחת הזוויות היא ישרה הוא ריבוע.

(6) טרפז

טרפז הוא מרובע בעל זוג צלעות מקבילות.

(א) שטח הטרפז שווה למחצית מכפלת הגובה לבסיס בסכום הבסיסים.

(ב) בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות.



(7) קטע אמצעים במשולש

קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר זוג אמצעי צלעות במשולש.

(א) קטע האמצעים שווה למחצית הצלע שמולו.

(ב) קטע אמצעים מקביל לצלע שמולו.

(ג) משפטים הפוכים –

(1) קטע היוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע השלישית הוא קטע אמצעים.

(2) קטע היוצא מאמצע צלע ושווה למחצית הצלע השלישית הוא קטע אמצעים.

(3) קטע המקביל לצלע במשולש ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.

(ד) שטח משולש שווה למכפלת קטע האמצעים בגובה לצלע שמולו.

(8) קטע אמצעים בטרפז

קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי שוקי הטרפז.

(א) קטע האמצעים שווה למחצית סכום בסיסי הטרפז.

(ב) קטע האמצעים מקביל לבסיסי הטרפז.

(ג) משפטים הפוכים –

(1) קטע היוצא מאמצע שוק ומקביל לבסיסים הוא קטע אמצעים.

(2) קטע היוצא מאמצע שוק ושווה למחצית סכום הבסיסים הוא קטע אמצעים.

(3) קטע המקביל לבסיסים ושווה למחצית סכום הבסיסים הוא קטע אמצעים.

(ד) שטח טרפז שווה למכפלת קטע האמצעים בגובה הטרפז.

(9) המעגל

מעגל הוא המקום הגיאומטרי של נקודות המרוחקות מרחק שווה מנקודה מסוימת – מרכז המעגל.

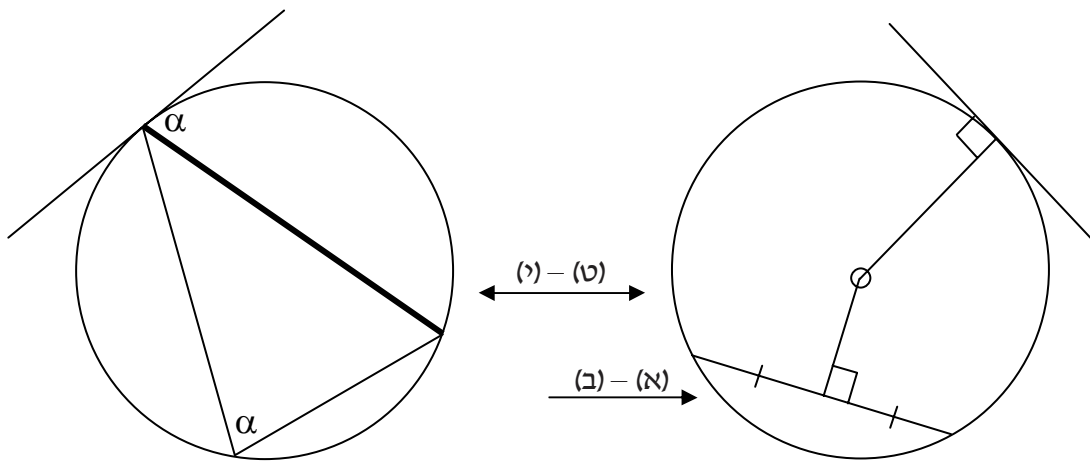
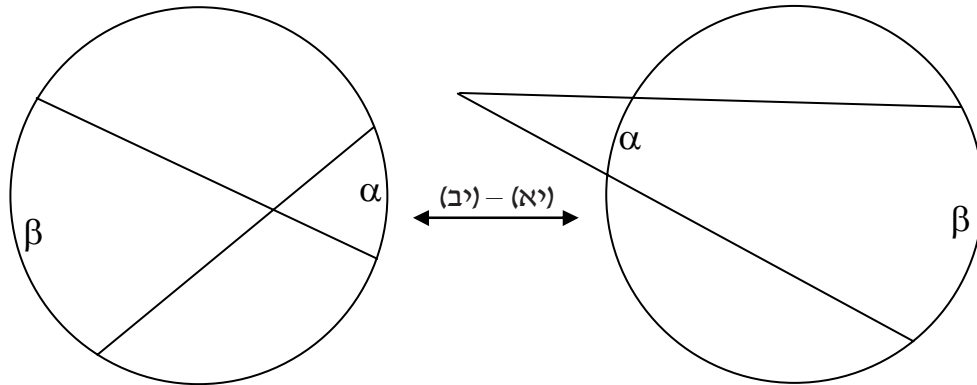
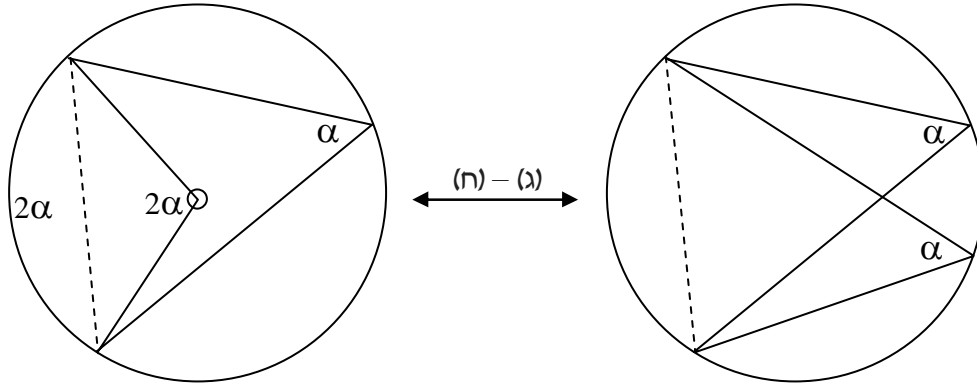
(א) קטע המחבר את מרכז המעגל עם אמצע מיתר, מאונך למיתר.

(ב) קטע היוצא ממרכז המעגל ומאונך למיתר, חוצה את המיתר.

(ג) זוויות מרכזיות הנשענות על קשתות שוות, שוות בעצמן.

(ד) זוויות מרכזיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות בעצמן.

- (ה) למיתרים שווים מתאימות זוויות מרכזיות שוות ומתאימות קשתות שוות.
 (ו) זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.
 (ז) זווית היקפית שווה למחצית הקשת עליה היא נשענת.
 (ח) לזוויות היקפיות שוות מתאימות קשתות שוות ומתאימים מיתרים שווים.
 (ט) זווית בין משיק למיתר, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו המיתר.
 (י) קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודת ההשקה של המשיק, מאונך למשיק.
 (יא) זווית פנימית שווה למחצית סכום הקשתות שהיא חותכת מן המעגל.
 (יב) זווית חיצונית שווה למחצית הפרש הקשתות שהיא חותכת מן המעגל.



הערות, הארות ותיקונים לעורך

מספר	מספר עמוד	הערה / הארה / תיקון
.1		
.2		
.3		
.4		
.5		
.6		
.7		
.8		
.9		
.10		
.11		
.12		
.13		
.14		
.15		
.16		
.17		
.18		
.19		
.20		
.21		
.22		
.23		
.24		
.25		